תרגיל 3

1. הוכיחו/הפריכו: הפונקציה $f(x)=x^5$ רציפה במרחב המטרי $(\mathbb{Z},d_3)$.

2. א. הוכיחו כי במרחב מטרי (X,d), לכל $x\in X$, הקבוצה $\{x\}$ סגורה.
ב. הסיקו כי במרחב מטרי כל קבוצה סופית היא סגורה.

3. א. הוכיחו ש $\mathbb{Q}$ אינה פתוחה ואינה סגורה ב$\mathbb{R}$.
ב. הוכיחו שהקבוצה $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sin(x)+xy\leq 5\}$ סגורה ב$\mathbb{R}^2$.
ג. הוכיחו שכל מישור סגור ב$\mathbb{R}^3$.
ד. יהי $M_n(\mathbb{R})$ המרחב המטרי של מטריצות ריבועיות עם מקדמים ממשיים. (מתייחסים אליו כאל המרחב $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריות ההפיכות, $GL_n(\mathbb{R})$, פתוחה בו.

4. תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה.
א. הוכיחו ש f רציפה אמ"א המקור של כדור פתוח ב Y, הוא קבוצה פתוחה בX.
ב. הוכיחו שהמשפט האנלוגי עם כדורים סגורים אינו נכון.

5. יהי $C[0,1]$ המרחב המטרי של פונקציות רציפות מ $[0,1]$ ל $\mathbb{R}$, עם מטריקת המקסימום. (כלומר, $||f|| = \max\limits_{0\leq x\leq 1}\{f(x)\}$).
א. יהי $a\in[0,1]$. הוכיחו כי פונקציית ההצבה: $F_a : C[0,1]\to\mathbb{R}$, המוגדרת ע"י, $F_a(f)=f(a)$ היא רציפה.
ב. הוכיחוץהפריכו: הקבוצה הבאה: $\{f\in C[0,1] : f(\frac{1}{3})<15\}$ פתוחה.

6. א. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$A\subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם A סגורה בX, אז A מרחב מטרי שלם.
ב. הראו שאם X אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש A סגורה בX, אבל A לא מרחב שלם).
ג. יהי X מרחב מטרי כלשהו, ו$A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו שA סגורה בX.
ד. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.