חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: פרופסור אגרנובסקי
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

אינפי 1 - תרגיל 5

1. נגדיר סדרה באמצעות כלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n^{\,2}+1\right),\ a_1=c$. בדקו האם הסדרה מתכנסת, אם כן מצאו את גבולה והוכיחו שהוא אכן הגבול (אחרת, הוכיחו שהיא מתבדרת) במקרים הבאים:
   א. $c=\frac{1}{2}$
   ב. $c=2$
2. א. מצאו את הגבול של הסדרה: $a_n=\frac{5^{2n}}{3^{(n+1)^2}}$.
   ב. הוכיחו או הפריכו: הסדרה $a_n=\sqrt[n]{n}$ היא מונוטונית (עולה או יורדת) החל ממקום מסויים.
3. תהי $\{a_n\}$ סדרה שאינה חסומה מלעיל. הוכיחו/הפריכו:
   א. $\{a_n\}$ שואפת לאינסוף
   ב. ל-$\{a_n\}$ יש תת סדרה ששואפת לאינסוף
   ג. $a_{n+1}\geq a_n$ עבור אינסוף n-ים.
4. תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$, ונתון $a_1=c>0$
   א. עבור אילו ערכי c הסדרה מונוטונית עולה? יורדת?
   ב. עבור אילו ערכי c הסדרה מתכנסת?
   ג. מה גבול הסדרה עבור ערכי c מהסעיף הקודם?
5. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ ונתון $a_1>0$.
   הוכיחו ש-$\{a_n\}$ אינה חסומה. (רמז: הראו שהיא מונוטונית קודם כל).
6. יהיו $\{a_n\},\{b_n\}$ שתי סדרות ויהיו A,B קבוצות הגבולות החלקיים שלהם במובן הצר, בהתאמה. תהי $c_n=a_n+b_n$ סדרה, ותהי C קבוצת הגבולות החלקיים שלה (גם כן במובן הצר). הוכיחו או הפריכו:
   א. $C\subseteq A$
   ב. $C\subseteq A\bigcup B$
   ג. $C=\{a+b:a\in A,b\in B\}$

7. תהי $\{a_n\}$ סדרה ותהי $\{b_n\}$ סדרה המתלכדת עם $\{a_n\}$ החל ממקום מסויים.
האם כל גבול חלקי של $\{b_n\}$ הוא גם גבול חלקי של $\{a_n\}$? הוכיחו או הפריכו!

בהצלחה!