גיאומטריה אקסיומטית- פתרון תרגיל 2

תרגיל 1

נתון $A * B * C$ הוכיחו כי B הנקודה היחידה המשותפת לקרנים $\overrightarrow{BA}$ ו-$\overrightarrow{BC}$.

פתרון 1:

נניח בשלילה שיש עוד נקודה משותפת $D \neq B$ בחיתוך של $\overrightarrow{BA}$ ו-$\overrightarrow{BC}$, $D \in \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$.

נתון $A * B * C$ לכן A לא נמצאת על הקרן $\overrightarrow{BC}$ ז"א $D \neq A$.

C לא נמצאת על הקרן $\overrightarrow{BA}$ לכן $D \neq C$. כלומר $D \neq A, B, C$ לפי ההנחה.

$D \in \overrightarrow{BA}$ לכן לפי הגדרת הקרן מתקיים:

א) $B * A * D$ או ב) $B * D * A$

מקרה א': אם $B * A * D$:
אז מתקיים לפי אקסיומה $B-1$ $D * A * B$ ובנוסף נתון $A * B * C$,
לכן לפי משפט תוצאה למשפט $B-3$ שתוכיחו בבית, נקבל ש-$D * A * C$ ו-$D * B * C$.
$D * B * C \Leftarrow D \notin \overrightarrow{BC}$.
קיבלנו סתירה.
מקרה ב': אם $B * D * A \Leftrightarrow A * D * B$ (שקול).
לכן בהכרח מתקיים $D \in BA$ (קטע).
לא צריך קרן כי אנחנו מנסים להראות סתירה למשפט 3.5 שהנקודה היחידה המשותפת היא B.
כעת לפי הנחה $D \in \overrightarrow{BC}$ לכן $B * C * D$ או $B * D * C$ – נשלול אחת מהן.
נשלול את $B * C * D$:
שוב לפי הנתון $A * B * C$ ו-$B * C * D$ לכן לפי משפט תוצאה למשפט $B-3$ מתקיים
$A * B * D$ כלומר D לא נמצאת על הקרן $\overrightarrow{BA}$ בניגוד להנחה. $\Leftarrow$ לא יתכן $B * C * D$.
ז"א שמתקיים $B * D * C \Leftarrow D \in BC$. D שיכת לקטע BC – מספיק בלי קרן כי רוצים להשתמש במשפט 3.5 .
ובכך הוכחנו כי $D \in BA$ וגם $D \in BC \Leftarrow D \in BA \cap BC$.
אבל לפי משפט 3.5 נתון כי $A * B * C$ אז B הנקודה המשותפת היחידה לקטע AB ו-BC .
אבל הרגע הוכחנו שיש גם D שמשותפת לקטעים אלו $\Leftarrow$ סתירה למשפט 3.5.
$\Leftarrow$ הנקודה היחידה המשותפת לקרנות $\overrightarrow{BA}$ ו-$\overrightarrow{BC}$ היא B.

תרגיל 2

נתון $A * B * C$ הראו כי $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
הערה: יש לבדוק את כל המקרים בהגדרת הקרן ולהראות את ההכלה הדו כיוונית.

פתרון 2

נוכיח כעת כי $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

נוכיח הכלה דו כיוונית.

<u>כיוון ראשון:</u> $\overrightarrow{AC} \subseteq \overrightarrow{AB}$.

ניקח נקודה כלשהי P על $\overrightarrow{AB}$.

- אם $P = A$ אז $P \in \overrightarrow{AC}$ וסיימנו.
- אם $P = B$ ונתון ש-$A * B * C$ אז $P \in \overrightarrow{AC}$ כי P נמצאת על הקטע AC והקרן $\overrightarrow{AC}$ היא הקטע איחוד עוד משהו.

כעת $A \neq P \neq B$ ו-P על $\overrightarrow{AB}$, אז מתקיים או $B * P * A$ או $P * B * A$.

אם <u>$B * P * A$</u> : ונתון $C * B * A$ לפי משפט $B - 3$ מתקיים $C * P * A$

$P \in \overrightarrow{AC} \Leftarrow$. מסתכלים מה רוצים להוכיח. רוצים ש-$P \in \overrightarrow{AC}$ ולכן לוקחים את היחס שיתן לנו זאת.

אם <u>$P * B * A$</u> ונתון $C * B * A$

לא יודעים אם P לפני B אז אין אפשרות להשתמש ביחסים האלו כי B במקום השני בשני היחסים וראינו שהוא צריך להיות במקום השני וביחס השני במקום השלישי בכדי להשתמש במשפט $B - 3$ או בתוצאה שלו.

לכן, רוצים להוכיח כי $P \in \overrightarrow{AC}$.

ניח בשלילה ש-$P \notin \overrightarrow{AC}$ ז"א שמתקיים $(*)\ C * A * P$ יחד עם $(**)\ P * B * A \Leftarrow$ לפי אקסיומה $B - 1$ זה שקול ל-$P * B * A$.

עשינו זאת בכדי לקבל P ראשונה בשני היחסים, שאמת רואים שA ביחס אחד במקום השני וביחס השני במקום השלישי ולכן נשתמש במשפט $B - 3$ $(*) + (**)$.

לכן מתקיים $C * A * B$ וזה בסתירה לנתון ש- $C * B * A \Leftarrow P \in \overrightarrow{AC}$.

ובכך הוכחנו כי $\overrightarrow{AC} \subseteq \overrightarrow{AB}$ וטיפלנו בכל המקרים.

<u>כיוון שני:</u> $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AC}$ – אותה הוכחה בדיוק כמו הכיוון הראשון.

ניקח נקודה כלשהי P על $\overrightarrow{AC}$.

- אם $P = A$ אז $P \in \overrightarrow{AB}$ וסיימנו.
- אם $P = C$ ונתון ש-$A * B * C$ אז $P \in \overrightarrow{AB}$ לפי הגדרת קרן.

כעת $P \neq A, C$ ו-P נקודה על $\overrightarrow{AC}$, לכן יתכנו האפשרויות הבאות $C * P * A$ או $P * C * A$ – נבדוק את שני המקרים.

אם <u>$P * C * A$</u> : ונתון $C * B * A$ נקבל לפי משפט $B - 3$ $P * B * A$ כלומר $P \in \overrightarrow{AB}$.

אם <u>$C * P * A$</u> ונתון $C * B * A$

לא יודעים אם P לפני B לכן אין אפשרות להשתמש במשפט $B - 3$.

ניח בשלילה ש-$P \notin \overrightarrow{AB}$ כלומר מתקיים $B * A * P$ ונתון $C * P * A \Leftarrow$ לפי תוצאה למשפט $B - 3$ נקבל ש-$B * A * C$ וזה בסתירה לנתון כי $C * B * A \Leftarrow P \in \overrightarrow{AB}$.

ובכך הוכחנו כי $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AC}$.

בסה"כ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ והשלמנו את ההוכחה של המשפט. מש"ל

<u>תרגיל 3</u>

אם D נקודה בפנים $\sphericalangle CAB$, אז כל נקודה אחרת על הקרן $\overrightarrow{AD}$, פרט לנקודה A נמצאת בפנים $\sphericalangle CAB$.

<u>פתרון 3</u>

נשתמש בלמה שהוכחתם בתרגיל 1 שאלה 3.

בהנתן ישר ℓ, A נקודה על ℓ ונקודה B לא על ℓ, אז כל נקודה של הקרן $\overrightarrow{AB}$ פרט ל-A היא באותו צד של ℓ כמו B, ז"א לא חותכת את ℓ.

לפי הנתון D בפנים של $\sphericalangle CAB$, כלומר:

1) D באותו צד של $\overleftrightarrow{AC}$ כמו B

2) D באותו צד של $\overleftrightarrow{AB}$ כמו C

3) A נקודה על $\overleftrightarrow{AC}$ ו-D לא עליו לכן לפי הלמה כל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט לנקודה A הן באותו צד של $\overleftrightarrow{AC}$ כמו D.

לפי 1) + 3) כל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט ל- $\underline{A}$ הן באותו צד של $\overleftrightarrow{AC}$ כמו $\underline{B}$. - לפי אקסיומה $B-4$ (1).

נוכיח אותו דבר עבור $\overleftrightarrow{AB}$.

A נקודה על $\overleftrightarrow{AB}$ ו-D לא עליו לכן לפי הלמה כל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט לנקודה A הן באותו צד של $\overleftrightarrow{AB}$ כמו D.

לפי 2) D באותו צד של $\overleftrightarrow{AB}$ כמו C.

לכן לפי $B-4$ (1) כל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט לנקודה $\underline{A}$ הן באותו צד של $\overleftrightarrow{AB}$ כמו $\underline{C}$.

ולפי הגדרה של פנים $\sphericalangle CAB$ אכן מתקים שכל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט ל- A נמצאות בפנים $\sphericalangle CAB$.