תרגיל 8

1) א. נזכר

$$\vec{r} = r\hat{r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

כאשר $\hat{r} = (c\theta, s\theta)$

$$F = -mr(\dot{\theta})^2\hat{r} = -mr\omega^2\hat{r} = -mr\omega^2(c\theta, s\theta)$$

עתה

$$x = r\,c\theta$$
$$y = r\,s\theta$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \hat{x}\,(0-0) \\ -\hat{y}\,(0-0) \\ \hat{z}\,(0-0) \end{matrix} = 0 \checkmark$$

כוח משמר

ב. אם מדובר בכוח משמר הרי שניתן לבחור את המסלול שעליו נסתכל

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy = -m\omega^2 \int_{00}^{x0} x' dx' - m\omega^2 \int_{x0}^{xy} y' dy' = -m\omega^2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$W = U(0,0) - U(x,y) = 0 - U(x,y)$$
$$\downarrow$$
$$U_{(x,y)} = -W = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

2) א. מאחר ולא קיימים כוחות חיצוניים הרי כי קיים שימור תנע:

$$P_1 + P_2 = P_1' + P_2'$$
$$0 = m_1 v + m_2 u \rightarrow u = -\frac{m_1}{m_2} v \quad (1)$$

v יגדל בשלב מסוים (מאחר והמנוע מושך את הקופה), אך לאחר מכן הוא גם יקטן עד אפס מאחר וכוח החיכוך יאט את v עד כדי עצירה זה יקרה לאחר זמן רב, מתוך העובדה כי קיים שימור תנע נובע מכך כי גם מהירות הרפסודה צריכה להתאפס.

ב) ניתן לזהות 4 שלבים:

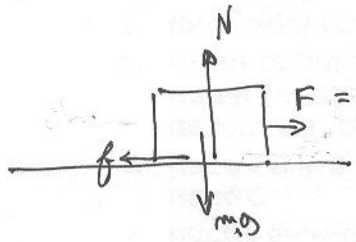
(א) כוח פועל על תיבה, אך הוא לא נעה.

(ב) כוח פועל על תיבה והיא נעה.

(ג) כוח לא פועל על התיבה אך היא עדין נעה.

(ד) התיבה נעה ויחד עם הרפסודה (התיבה לא נעה יחסית לרפסודה)

עתה נרצה לראות מהי מהירות התיבה בשלב (ב):



$$\sum F_x = F - f = \beta t - \mu_k m_1 g = m_1 a$$

$$\frac{\beta}{m_1}t - \mu_k g = a$$

$$f = \mu N = \mu m_1 g$$

יש לזהות את הזמן שבו החלה התנועה. לשם כך נסתכל על שלב א':

$$\sum F_x = F - \mu_s m_1 g = 0$$

$$\beta t = \mu_s m g$$

$$t_1 = \frac{\mu_s m_1 g}{\beta}$$

את המהירות בקטע ב(ב) נמצא על ידי אינטגרציה על התאוצה:

$$v(t) = \int_{t_1}^{t} a(t) = \int_{\frac{\mu_s m_1 g}{\beta}}^{t} \left(\frac{\beta}{m_1}t' - \mu_k g\right)dt' = \frac{\beta}{m_1}\frac{1}{2}t'^2\Big|_{\frac{\mu_s m_1 g}{\beta}}^{t} - \mu_k g t'\Big|_{\frac{\mu_s m_1 g}{\beta}}^{t} + \underset{v(t_1)=0}{Const} =$$

$$\boxed{v(t)} = \frac{\beta}{m_1}\left(\frac{1}{2}t^2 - \left(\mu_s\frac{m_1 g}{\beta}\right)^2\right) - \mu_k g\left(t - \frac{\mu_s m_1 g}{\beta}\right) =$$

$$= \frac{\beta}{m_1}\frac{1}{2}t^2 - \mu_k g t - \frac{\beta}{m_1}\mu_s^2\frac{m_1^2 g^2}{\beta^2} + \mu_k\mu_s\frac{m_1}{\beta}g = \frac{\beta}{m_1}\frac{1}{2}t^2 - \mu_k g t - \frac{m_1 g^2}{\beta}(\mu_s - \mu_k)\mu_s$$

המהירות של התיבה ביחס לרפסודה צריכה להיות:

$v - u$ מתוך (ו)

$$v - \left(-\frac{m_1}{m_2}v\right) = v\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

לפי רפסודה

$$v(t) = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\left[\frac{1}{2}\frac{\beta}{m_1}t^2 - \mu_k g t - \frac{m_1 g^2}{\beta}(\mu_s - \mu_k)\mu_s\right]$$

ב. נסתכל על הקטעים השונים!

(א) $F=0; a=0$

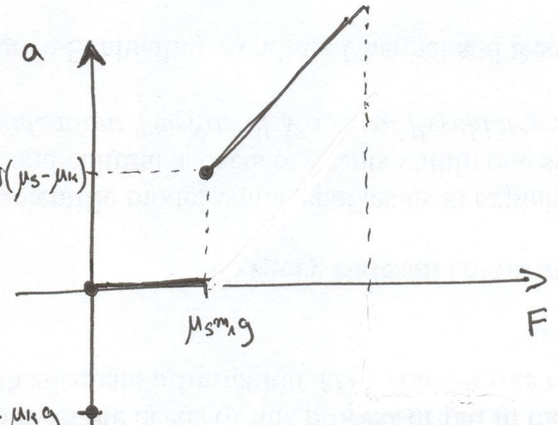
(ב) $F-\mu_k g m_1 = m_1 a$

$\hookrightarrow a = \frac{F}{m_1} - \mu_k g$

(ג) $0-\mu_k m_1 g = m_1 a$

$a = -\mu_k g$

(ד) $a=0$



ג. אם נתון כי בסוף שלב (ב) התאוצה היא a_0 אז ידוע כי

$\frac{F}{m} - \mu_k g = a$

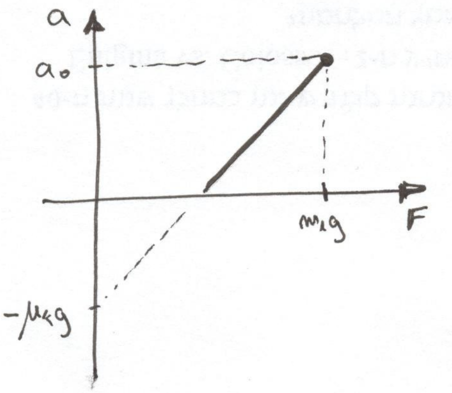
בשלב מסוים F יתקטן לאפס וע"י

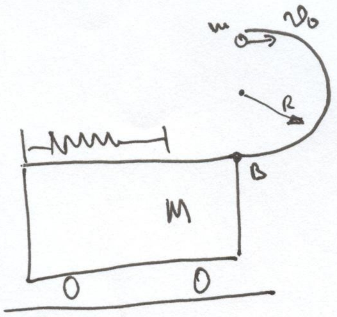
$a = -\mu_k g$

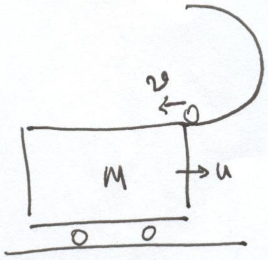
ובתחילה התאוצה היא

$a = a_0$

בנקודת ההתחלה $t = \frac{m_1 g}{\beta}$ ולכן $F = m_1 g$







א. מאחר ולא פועלים כוחות חיצוניים בציר x , ניתן לרשום משוואות שימור תנע ב-x ושימור אנרגיה עבור המערכת

שימור תנע:

$$\cancel{m}v_0 = mv + Mu = \cancel{m}v + 4\cancel{m}u$$

$$\frac{1}{4}(v_0 - v) = u$$

שימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg2R = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}4mu^2 \quad / \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_0^2 + 4gR = v^2 + 4u^2$$

$$v_0 = 2\sqrt{gR}$$

$$u = \frac{1}{4}(v_0 - v)$$

$$v_0^2 + 4gR = v^2 + 4\left(\frac{1}{4}(v_0 - v)\right)^2 = v^2 + 4\frac{1}{\cancel{16}_{4}}(v_0^2 - 2v_0v + v^2)$$

$$4v_0^2 + 16gR = 4v^2 + v_0^2 - 2v_0v + v^2$$

$$5v^2 - 2v_0v - 3v_0^2 - 16gR = 0$$

$$5v^2 - 4\sqrt{gR}\,v - \overset{12}{3\cdot 4}gR - 16gR = 0$$

$$5v^2 - 4\sqrt{gR}\,v - 28gR = 0$$

$$\frac{4\sqrt{gR} \pm \sqrt{16gR + 4\cdot 5\cdot 28gR}}{10} = \frac{4\sqrt{gR} \pm \sqrt{16gR + 16\cdot 35gR}}{10}$$

$$v = \frac{4\sqrt{gR} \pm 4\sqrt{gR}\sqrt{1+35}}{10} = \frac{2}{5}\sqrt{gR}(1 \pm 6)$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{gR}\,7 = \frac{14}{5}\sqrt{gR}$$

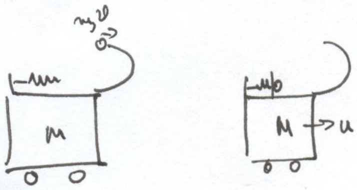
$$\frac{2}{5}\sqrt{gR}(-5) = -2\sqrt{gR}$$

עתה ברור שלפי הגדרת u ושל v

$$\boxed{v = -2\sqrt{gR}}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{4}(v_0 - v) = \frac{1}{4}(2\sqrt{gR} + 2\sqrt{gR}) = \sqrt{gR}}$$

ב. את מידת ההתכווצות של הקפיץ אפשר למצוא שוב מהנחות שימור תנע ואנרגיה:



שימור תנע

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) u$$

שימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g 2R = \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

$$m_1 v_0^2 + m_1 g 4 = \frac{(m_1+m_2)^2 u^2}{m_1+m_2} + k(\Delta x)^2$$

משימור תנע:

$$m_1 v_0^2 + m_1 g 4R = \frac{m_1^2}{m_1+m_2} v_0^2 + k(\Delta x)^2$$

$$m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)v_0^2 + m_1 g 4R = k(\Delta x)^2$$

כאשר $m_2=4m_1$ ו- $m_1=m$

$$m\left(1-\frac{1}{5}\right)v_0^2 + mg4R = k(\Delta x)^2$$

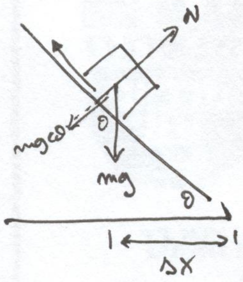
$$v_0 = 2\sqrt{gR} \longrightarrow \frac{4}{5} m 4 gR + mg4R = k(\Delta x)^2$$

$$\frac{4+5}{5} 4mgR = k(\Delta x)^2$$

$$\frac{9 \cdot 4}{5} mgR = k(\Delta x)^2$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{6}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{mgR}{k}}}$$

(4) א. נסתכל ראשית על המקרה של שיפוע:



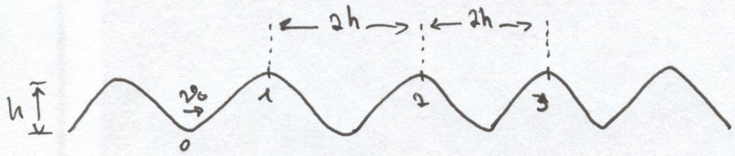
$$\Sigma F_y = N - mg\,c\theta = 0$$

$$N = mg\,c\theta$$

$$f = -\mu N = -\mu mg\,c\theta$$

$$W = f\cdot\frac{\Delta x}{c\theta} = -\mu mg\,c\theta\cdot\frac{\Delta x}{c\theta} = -\mu mg\,\Delta x \rightarrow$$

אנו רואים כי
העבודה תלויה
רק בכמה התקדם
הגוף בכיוון x.



אם מסתכלים על אנרגיות:

בין נקודה 0
לפסגה 3 (3)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}mv^2}_0 + mgh + W_{0\to3}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = W_{0\to3}$$

$$W_{0\to3} = f\cdot5h \quad \Big\} \rightarrow fh = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh\right) \quad (i)$$

כאשר העבודה בין 2 ל-3 היא

$$\boxed{W_{2\to3} = f\,2h = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh\right)}$$

ב. עתה אפשר למצוא את v_0 מתוך (i) והעובדה ש- $f = \mu mg$

$$\mu mg\,5h = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh \quad (ii)$$

$$mgh(1+5\mu) = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \boxed{v_0 = \sqrt{2gh(1+5\mu)}}$$

ג. המהירות על פסגה ראשונה:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + fh$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh - fh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{4}{5}(\mu mg\,5h) = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{8\mu g5h}$$ ממשוואה ii

בצורה דומה ניתן לחשב את המהירות על פסקה ב:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + f3h$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh - f3h = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh - 3\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{2}{5}\left(\mu \cancel{m} g 5h\right) = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$\boxed{v = 2\sqrt{\mu g h}}$$

(5) א. נסתכל על שימור אנרגיה בין נקודת השחרור לבין נקודת הקצה העליון של המסילה.

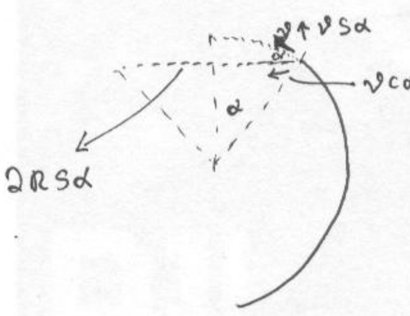
$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2$$

כאשר אני יודע כי כדי שתתבצע תנועה מעגלית מלאה על v קיים תנאי $v^2 = gR$

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mRg$$

$$\boxed{h = 2R + \frac{1}{2}R = \frac{5}{2}R}$$

ב. נסתכל על נקודת הניתוק



אני רוצה כי כאשר החלקיק יהיה בשיא הגובה הוא עבר חצי מרחק $2Rs\alpha$

לכן מתוך המשוואה בציר y:

$$v = vs\alpha - gt = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{vs\alpha}{g}$$

מתוך ציר x:

$$Rs\alpha = vc\alpha \cdot t = vc\alpha\frac{v\,\cancel{s\alpha}}{g}$$

$$v^2 = \frac{Rg}{c\alpha}$$

המהירות שדרושה לנו בנקודת הניתוק

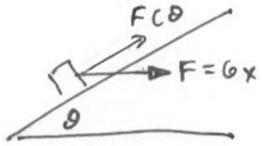
עכשיו אפשר להסתכל על שימור אנרגיה:

$$\cancel{m}gh = \cancel{m}g(R + Rc\alpha) + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$gh = gR(1 + c\alpha) + \frac{1}{2}\frac{Rg}{c\alpha}$$

$$\boxed{h = R\left(1 + c\alpha + \frac{1}{2}\frac{1}{c\alpha}\right)}$$

(6) א. נתון:



$$W=\int \vec{F}\cdot dr=\int_{0.1}^{0.2} F c\theta\, dx=\int_{0.1}^{0.2} 6x\,(0.7-0.02x)\,dx=\int_{0.1}^{0.2}(0.7-0.12x^2)\,dx=4.2\tfrac{1}{2}x^2\Big|_{0.1}^{0.2}-0.12\tfrac{1}{3}x^3\Big|_{0.1}^{0.2}=$$

$$=2.1(\overset{0.01}{\widehat{0.2^2-0.1^2}})-0.04(\overset{0.1}{\widehat{0.2-0.1}})=0.017$$

ב. עדכון בנתונים:

$$\sin\theta=0.02x$$
$$\downarrow$$
$$\cos\theta=\sqrt{1-(0.02x)^2}$$

$$W=\int 6x\sqrt{1-(0.02x)^2}\,dx=6\int x\sqrt{1-0.02^2x^2}\,dx=\cancel{6}^{3}\left[\frac{\frac{2}{3}\left(1-(0.02)^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-\cancel{2}(0.02)^2}\right]_{0.1}^{0.2}=$$

$$=\frac{2}{(0.02)^2}\left[\left(1-(0.02)^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{0.2}^{0.1}=\frac{2}{(0.02)^2}\left[\left(1-0.02^2(0.1)^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1-(0.02)^2(0.2)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]=0.09$$

ג. עתה נתון כי $F=0.7-0.02x$ ואין שיפוע.

$\boxed{\text{מצטערים על חוסר הבהירות שהיתה בשאלה}}$

$P=F\cdot v$ הספק

מאחר ונתון F, צריך למצוא את v.

$$F=ma=0.7-0.02x=m\ddot{x}$$

$$\ddot{x}+\frac{0.02}{m}x=\frac{0.7}{m}\quad (1)$$

הפתרון ההומוגני

$$x=c_1\cos\left(\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}t\right)+\text{Const}$$

הפתרון הפרטי

$$\dot{x}=-\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}c_1\sin\left(\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}t\right)+\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}c_2\cos\left(\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}t\right)$$

$$\ddot{x}=-\left(\tfrac{0.02}{m}\right)\left(c_1\cos\left(\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}t\right)\right)$$

אם נחזיר הכל למשוואה (1) נקבל

$$\frac{0.02}{m}\text{Const}=\frac{0.7}{m}$$

$$\boxed{\text{Const}=35}$$

$$x=c_1\cos\left(\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\tfrac{0.02}{m}}t\right)+35$$

אם נניח כי ב-t=0 הגוף נמצא בראשית במנוחה.

$$\dot{x}(t=0)=\sqrt{\frac{0.02}{m}}\left(-C_1\underbrace{\sin(0)}_{0}+C_2\cos(0)\right)=0$$

$$\hookrightarrow C_2=0$$

$$x(t=0)=C_1\overset{1}{\cos(0)}+35=0$$

$$\hookrightarrow C_1=-35$$

ולכן

$$x=35\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)\right)$$

$$\downarrow$$

$$v=\dot{x}=35\sqrt{\frac{0.02}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)$$

$$F\cdot v=\left[0.7-0.02\cdot 35\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)\right)\right]35\sqrt{\frac{0.02}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)$$

$$\boxed{F\cdot v=\left[\cancel{0.7}-\cancel{0.7}+\frac{7}{\cancel{10}\,2}\left(\cos\left(\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)\right)\right]\overset{7}{\cancel{35}}\sqrt{\frac{0.02}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)=\frac{49}{4}\sqrt{\frac{0.02}{m}}\sin\left(2\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)}$$

עתה נחשב את העבודה:

$$x=35\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)\right)$$

$$\downarrow$$

$$t=\frac{\arccos\left(1-\frac{x}{35}\right)}{\sqrt{\frac{0.02}{m}}}$$

$$\boxed{W=\int F\cdot v\,dt=\frac{49}{4}\sqrt{\frac{0.02}{m}}\int_{\frac{\arccos(1-\frac{0.1}{35})}{\sqrt{0.02/m}}}^{\frac{\arccos(1-\frac{0.2}{35})}{\sqrt{0.02/m}}}\sin\left(2\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)=\rightarrow}$$

$$\rightarrow=\frac{49}{4}\cancel{\sqrt{\frac{0.02}{m}}}\left[-\frac{\cos\left(2\sqrt{\frac{0.02}{m}}t\right)}{2\cancel{\sqrt{\ }}}\right]=\frac{49}{8}\left[\cos\left(2\cancel{\sqrt{\ }}\frac{\arccos(1-\frac{0.1}{35})}{\cancel{\sqrt{\ }}}\right)-\cos\left(2\cancel{\sqrt{\ }}\frac{\arccos(1-\frac{0.2}{35})}{\cancel{\sqrt{\ }}}\right)\right]=\rightarrow$$

$$\rightarrow=\frac{49}{\cancel{8}\,4}\left[\cancel{2}\cos^2\left(\arccos\left(1-\frac{0.1}{35}\right)\right)\cancel{-1}-\cancel{2}\cos^2\left(\arccos\left(1-\frac{0.2}{35}\right)\right)\cancel{+1}\right]=\frac{49}{4}\left(\left(1-\frac{0.1}{35}\right)^2-\left(1-\frac{0.2}{35}\right)^2\right)=\rightarrow$$

$$\rightarrow=\frac{49}{4}\left(\cancel{1}-\frac{0.1}{35}-\cancel{1}+\frac{0.2}{35}\right)\left(1-\frac{0.1}{35}+1-\frac{0.2}{35}\right)=\frac{\overset{7}{\cancel{49}}}{4}\cdot\frac{0.1}{\cancel{35}\,5}\left(2-\frac{0.3}{35}\right)=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{50}\left(\frac{70-0.3}{\cancel{35}\,5}\right)=\frac{69.7}{1000}=0.0697$$