# תרגיל 5

28 בנובמבר 2012

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית ($A \in M_4(\mathbb{R})$). מצא $V, W \subseteq M_4(\mathbb{R})$ תתי מרחבים אינווריאנטיים תחת כפל ב $A$ עם מימד 2 כך ש $V \bigoplus W = \mathbb{R}^4$. יש לפתור את התרגיל בלי להסתמך בתרגיל 2.

   **(רמז:** חשב את הפולינום האופייני של $A$ והתייחס אל $A$ כאל מטריצה מרוכבת).

2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, $f(\lambda)$ פולינום האופייני של $A$, $f = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ כאשר $p_1, p_2$ הם פולינומים זרים, כלמר $gcd(p_1, p_2) = 1$. נסמן $V = \mathbb{F}^n$.

   (א) נסמן $W_i := \ker \{p(A)v : v \in V\}$. הוכח: לכל $i$, $W_i$ הוא מרחב אינווריאנטי תחת כפח ב $A$.

   (ב) הוכח $V = W_1 \bigoplus W_2$. (תזכורת: מאלגוריתם אוקלידס של חילוק פולינומים נובע שאם $p_1, p_2$ הם פולינומים זרים, אזי קיימים פולינומים $f_1, f_2$ כך ש $f_1p_1 + f_2p_2 = 1$).

3. יהי $W \subseteq V$.

   (א) הוכח קיים $W' \subseteq V$ כך ש $W \bigoplus W' = V$.

   (ב) נגדיר הטלה $P : V \mapsto V$ באופן הבא: עבור $w \in W, w' \in W$ אנו נגדיר $P(w + w') = w$.
   תהי $T : V \mapsto V$ העתקה. הוכח: $W$ הוא אינווריאנטי תחת $T$ אם ורק אם $PTP = TP$.

4. נתבונן במטריצה ממשיות, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. לכל ערך עצמי של $A$ מצא את המרחב העצמי המוכלל המתאים, ואת המטריצה המייצגת של כפל ב $A$ המצומצמת אליה. הכלל את הדוגמה ל $n$ כללי.

5. תהי $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

(א) מצא ערכים הצמיים ומרחבים עצמיים מוכללים של המטריצה.

(ב) חשב את המטריצה המייצגת של כפל ב $A$ המצומצמת לכל מרחב עצמי ביחס לבסיס שלו.

(ג) בטא את כפל משמאל ב$A$ כמטריצת בלוקים אלכסונית ביחס לבסיס המתאים.

**(רמז:** אם אתם לא יודעים לפתור משוואה ממעלה 4 ־ אם קבלתם משוואה עם מקדם מוביל 1, אם יש שורש רציונלי ־ הוא חייב להיות מספר שלם שמחלק את המקדם החופשי של המשוואה).