אלגברה לינארית 1

- טענה: אם c פתרון של המערכת $(A|b)$ ו v פתרון של המערכת $(A|0)$ אזי $c+v$ פתרון של המערכת הלא הומוגנית גם כן. יתרה מזאת כל פתרון של $(A|b)$ הוא מהצורה $c+v$ כאשר v פתרון כלשהו של המערכת ההומוגנית
- משפט: אם מרחב וקטורי V נפרש על ידי קבוצה בעלת n וקטורים. אזי כל קבוצה בת יותר מ-n וקטורים בהכרח תלויה לינארית.
  רעיון ההוכחה: מניחים כי קיימת קבוצה בת n איברים הפורשת את המרחב, וקבוצה כלשהיא בעלת $m>n$ איברים. מבטאים כל וקטור בקבוצה על ידי וקטורים בקבוצה הפורשת, ומסתכלים על צירוף לינארי של כל וקטורי הקבוצה הגדולה כתובים באופן זה. בונים מערכת משוואות לינארית, מכיוון ש- $m>n$ יש אינסוף פתרונות למערכת (מסתכלים על מטריצת המקדמים) בפרט פתרון לא טריוויאלי.
- משפט: יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית אזי:
  - קיים בסיס למרחב
  - כל סדרה בת"ל ב-V ניתן להשלים לבסיס
  - בכל בסיס של V יש אותו מספר איברים.
- טענה: סדרת וקטורים ב-V היא בסיס $\Leftrightarrow$ לכל $x\in V$ קיימת הצגה יחידה כצירוף לינארי של איברי הסדרה. (ההוכחה נובעת מפרישה ואי תלות לינארית של הסדרה).
- משפט: כל סדרה סופית פורשת של מרחב וקטורי ניתן לצמצם לבסיס
- משפט: יהי V מ"ו נוצר סופית ו- $L\subset V$ תת מרחב לינארי, אזי מתקיים $dimL\le dimV$ יתרה מזאת $dimL=dimV \Leftrightarrow L=V$.

מטריצות

- משפט: כפל מטריצות היא פעולה דיסטריבוטיבית מעל חיבור מטריצות, וכן קיימת אסוציאטיביות של כפל מטריצות
- משפט: פעולת ה- transpose מוגדרת על ידי $(A^t)_{ij}=(A)_{ji}$ ומתקיים:
  - $(A^t)^t=(A)$
  - $(A+B)^t=A^t+B^t$
  - $(\lambda A)^t=\lambda A^t$
  - $(AB)^t=B^tA^t$
- טענה: כל מטריצה ניתן לבטא באמצעות סכום של מטריצה סימטרית $(A=A^t)$ ומטריצה אנטי סימטרית $(A=-A^t)$.
- כפל במטריצת בלוקים: $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AX+BZ & AY+BW\\ CX+DZ & CY+DW\end{pmatrix}$.

מטריצות הפיכות

- משפט: נתונה מערכת משוואות לינארית בת n משוואות ו-n משתנים – $Ax=b$. אם A הפיכה אזי קיים למערכת פתרון יחיד והוא $A^{-1}b$.
- משפט: תהי A מטריצה ריבועית הפיכה אזי מתקיים:
  - A^t הפיכה ו- $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$
  - אם גם B מטריצה הפיכה $n\times n$ אזי AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

- <u>הגדרה:</u> מטריצה אלמנטרית $\phi(I_n)$ הינה מטריצה שמתקבלת מהפעלת פעולת אלמנטרית אחת ϕ על מטריצת היחידה I_n.
- <u>הגדרה:</u> פעולה אלמנטרית הופכית ϕ^{-1} מוגדרת כך ש – $\phi^{-1}(\phi(A)) = A$ לכל A.
- <u>משפט:</u> ביצוע פעולה אלמנטרית ϕ על המטריצה $A_{m\times n}$ שקולה לכפל משמאל במטריצה אלמנטרית מתאימה: $\phi(A) = \phi(I_m)A$.
- <u>משפט:</u> כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה.
- <u>למה:</u> כל מטריצה ניתן להציג כמכפלה של מטריצות אלמנטריות במטריצה מדורגת קנונית.
- <u>משפט:</u> תהי A מטריצה נדרג אותה קנונית ונקבל $B = \phi_1(\phi_2(\ldots(\phi_k(A)\ \ldots)$.
  A הפיכה $\Leftrightarrow B = I_n$. במקרה זה $A^{-1} = \phi_1(\phi_2(\ldots\phi_k(I_n)..)$.
- <u>משפט:</u> תהי A מטריצה $n * n$ אזי הטענות הבאות שקולות:
  - A הפיכה.
  - לכל עמודה $b \in R^n$ למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
  - קיימת עמודה $b \in R^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
  - $A \sim I_n$.
- <u>משפט:</u> תהי A מטריצה $n * n$, הטענות הבאות שקולות:
  - A הפיכה (מניחים עמודות בת"ל ומראים שלמערכת $Ax = 0$ פתרון יחיד).
  - השורות של A בת"ל (נובע מכך שגם A^t הפיכה).
  - העמודות של A בת"ל (מניחים הפיכות ומשתמשים בכך של- $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד).
- <u>טענה:</u> המטריצות (ההפיכות) היחידות אשר מתחלפות עם כל המטריצות (כלומר מטריצה B המקיימת $AB = BA$) הינן מטריצות סקלריות, כלומר מטריצות מהצורה λI_n.

<u>דרגת המטריצה</u>

- <u>הגדרה:</u> הדרגה של המטריצה הינו המימד של המרחב הנפרש על ידי שורותיה.
- <u>משפט:</u> אם A_{n*n} ו- $rk(A) = n$ אזי:
  - A הפיכה
  - $span\{R_1, R_2, .., R_n\} = \mathbb{R}^n$
- <u>משפט:</u> אם $A \sim B$ אזי $rk(A) = rk(B)$.
- <u>משפט:</u> $rk(A^t) = rk(A)$.
- <u>משפט:</u> דרגה של מטריצה מדורגת (לאו דווקא קנונית) שווה למספר השורות השונות מ- 0 (מראים שכל השורות של A השונות מ-0 בת"ל, באינדוקציה).
- <u>משפט:</u> $rk(A^t) = rk(A)$
- <u>משפט:</u> $rk(AB) \leq \min\{rk(A), rk(B)\}$
- **(ת)** <u>טענה:</u> $rk(A + B) \leq rk(A) + rk(B)$ (מראים באמצעות הכלה של מרחב השורות של $A + B$ באיחוד מרחבי השורות של A ו-B).
- <u>טענה:</u> תהי A מטריצה $m \times n$, נסמן ב-$N(A)$ את מרחב הפתרונות של המערכת $(A|0)$. מתקיים: $dimN(A) = n - rk(A)$. (הוכחה: מדרגים, ואז מסבירים שהמימד של מרחב הפתרונות הוא מס' העמודות שאין בהן אחד פותח, והדרגה היא מספר השורות שיש בהן אחדות פותחים) .

<u>דטרמיננטה</u>

- <u>הגדרה לפי תכונות:</u> דטרמיננטה היא פונקציה שתחומה $M_n(R)$ המקיימת:

- o לינאריות ביחס לכל שורה בחיבור
  $\det\left(R_1,\ldots,R_i+R_j,\ldots,R_n\right)=\det(R_1,..,R_i,..,R_n)+\det\,(R_1,\ldots,R_j,\ldots,R_n)$
- o לינאריות ביחס לכל שורה בכפל בסקלר:
  $\det(R_1,\ldots,\lambda R_i,..,R_n)=\lambda\det\,(R_1,\ldots,R_i,..,R_n)$
- o אם למטריצה יש שתי שורות זהות אזי $\det(A)=0$.
- o $\det(I_n)=1$.

- <u>משפט:</u> עבור פעולה אלמנטרית $\phi\coloneqq R_i\leftrightarrow R_j$ מתקיים $det\phi(A)=-\det\,(A)$.
- <u>משפט:</u> עבור פעולה אלמנטרית $\phi\coloneqq R_i\to\lambda R_i$ מתקיים $det\phi(A)=\lambda\det(A)$.
- <u>משפט:</u> עבור פעולה אלמנטרית $\phi\coloneqq R_i\to R_i-\lambda R_j$ מתקיים $det\phi(A)=\det(A)$.
- <u>משפט:</u> יהיו A,B מטריצות $n\times n$ אזי מתקיים: $\det(AB)=\det(A)\det\,(B)$.
- <u>משפט:</u> מטריצה A הפיכה ⇔ $\det(A)\neq 0$.
- <u>משפט:</u> $detA=detA^t$.
- <u>הגדרה אינדוקטיבית:</u> $detA\coloneqq\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}a_{nj}detM_{nj}$
- <u>דטרמיננטה של ונדרמונד:</u> $V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$
- <u>דטרמיננטה במטריצת בלוקים:</u> $\begin{vmatrix}\mathrm{A}_{m\times m} & \mathrm{B}_{\mathrm{m\times n}}\\ 0_{n\times m} & \mathrm{C}_{\mathrm{n\times n}}\end{vmatrix}=\det(\mathrm{A})\det\,(\mathrm{C})$.
- <u>דטרמיננטה במטריצת בלוקים משולשית:</u>
  $\det\begin{pmatrix}A_1 & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & A_n\end{pmatrix}=\det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_n)$.
- <u>נוסחה מפורשת:</u> $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma_i}$. כאשר S_n קבוצת כל התמורות באורך n ($\#S_n=n!$).
- <u>**(ת)** דרגה ודטרמיננטה:</u> $rk(A)=k$ שקול לכך ש:
  - o קיים מינור בגודל $k\times k$ שהדטרמיננטה שלו שונה מאפס.
  - o כל מינור בגודל $(k+1)\times(k+1)$ הדטרמיננטה שלו שווה לאפס.

<u>מטריצה מוצמדת (*adjoint*)</u>

- <u>הגדרה:</u> $(adjA)_{ij}=(-1)^{i+j}detM_{ji}(A)$
- <u>משפט:</u> $A*adj(A)=adj(A)*A=detA*I_n$
- <u>אם מטריצה הפיכה אזי:</u> $A^{-1}=\frac{1}{detA}adj(A)$.
- <u>**(ת)** טענה:</u> תהי $A\in M_n(F)$:
  - o אם $rk(A)=n$ אזי $rk(adjA)=n$.
  - o אם $rk(A)\le n-2$ אזי $rk(adjA)=0$.

מרחבים וקטוריים מופשטים

$span$ של קבוצה:

- הגדרה: תהי $K \subset V$ תת קבוצה. נגדיר $span(K)$ כאוסף כל הצירופים הליניאריים של איברים מ-K אם $K \neq \emptyset$. אם $K = \emptyset$ אזי $span(K) = \{\theta\}$.
- $spanK \subset V$ תת מרחב ליניארי
- $K_1 \subset K_2 \leftarrow spanK_1 \subset spanK_2$
- אם $L \subset V$ תת מרחב ליניארי אזי $spanL = L$
- (תכונת המינימליות של ה-$span$) אם $K \subset L$ כאשר L תת מרחב ליניארי, אזי $spanK \subseteq L$ (כלומר $spanK$ הינו תת המרחב הליניארי הקטן ביותר אשר מכיל את K)

סכום מרחבים וסכום ישר:

- סכום תתי מרחב: יהיו $M_1, \dots, M_s \subset V$ תתי מרחב ליניאריים. נגדיר סכום שלהם על ידי: $M_1 + \dots + M_s := span\{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_s\}$.
- טענה: $M_1 + \dots + M_s = \{x_1 + \dots + x_s \mid x_i \in M_i \ \forall 1 \leq i \leq s\}$
- משפט: יהי V מרחב וקטורי ו- $M, N \subset V$ תתי מרחב נוצרים סופית, אזי $M + N$ תת מרחב נוצר סופית ומתקיים $\dim(M + N) = dimM + dimN - \dim(M \cap N)$.
- סכום ישר: יהיו $M_1, \dots, M_s \subset V$ תתי מרחב ליניאריים הסכום $\sum_{i=1}^{s} M_i$ נקרא סכום ישר אם לכל $1 \leq i \leq s$ מתקיים $M_i \cap (\sum_{j=1, j\neq i}^{s} M_j)$. נסמן $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_s$
- משפט: יהי V מ"ו נוצר סופית ונניח $V = M_1 + \dots + M_s$, אזי הטענות הבאות שקולות:
  - $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_s$
  - לכל $x \in V$ קיימת הצגה יחידה $x = a_1 + a_2 + \dots + a_s$ כך ש-$a_i \in M_i$.
  - קיים $x \in V$ שעבורו ההצגה $x = a_1 + a_2 + \dots + a_s$ כך ש-$a_i \in M_i$ היא יחידה.
  - אם $\theta = a_1 + a_2 + \dots + a_s$ אזי $a_i = \theta$ $\forall 1 \leq i \leq s$.
  - נסמן ב- $E^{(i)}$ קבוצת וקטורים שהינה בסיס של M_i אזי $E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots \cup E^{(s)}$ בסיס של V.
  - $dimV = dimM_1 + \dots + dimM_s$

קואורדינאטות במרחב וקטורי:

- הגדרה: יהי $e_1, \dots, e_n$ בסיס למרחב וקטורי V, לכל $x \in V$ קיימת הצגה יחידה $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. הסדרה $x_1, x_2, \dots, x_n$ נקראת הקואורדינאטות של x ביחס לבסיס $[e]$.
- מטריצת מעבר בין בסיסים: יהיו $[e], [e']$ שני בסיסים למרחב וקטורי V אזי כל וקטור בבסיס $[e']$ ניתן להציג כצירוף ליניארי של איברי הבסיס $[e]$.

מטריצת המעבר C מ-$[e]$ ל-$[e']$ הינה מטריצה אשר בה העמודה ה-i הינה הקואורדינאטות של e_i' ביחס לבסיס $[e]$ כלומר: $C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$.

מתקיים השוויון $[e'_1, \dots, e'_n] = [e_1, \dots, e_n]C$. (המטריצות שבהן הבסיסים הינן מטריצות וקטוריות).

- <u>טענה:</u> יהי $x \in V$ כך ש- $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ וגם $x = x'_1e'_1 + \dots + x'_ne'_n$, מתקיים $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ כאשר C היא מטריצת המעבר מ-$[e]$ ל-$[e']$.
- <u>למה:</u> $v_1, \dots, v_k \in V$ ו $A_{k\times p} -$ מטריצת סקלרים, אם $[v_1, \dots, v_k]A = [\theta, \theta, \dots, \theta]$ אזי $A = 0$.
- <u>טענה:</u> מטריצת מעבר בין בסיסים תמיד הפיכה.
- <u>טענה:</u> אם C מטריצת מעבר מ-$[e]$ ל-$[e']$ ו- D מטריצת מעבר מ-$[e']$ ל-$[e'']$ אזי CD מטריצת מעבר מ-$[e]$ ל-$[e'']$.

<u>טרנספורמציות ליניאריות:</u>

- <u>הגדרה:</u> יהיו V, W שני מ"ו מעל אותו שדה F. פונקציה $\varphi: V \to W$ נקראת טרנספורמציה ליניארית אם היא מקיימת שני תנאים:
  - $\forall(x, y \in V)\ \ \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
  - $\forall(x \in V\ \&\ \lambda \in F)\ \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$
- <u>טענה:</u> תהי φ טרנספורמציה ליניארית, אז בהכרח מתקיים $\varphi(\theta_v) = \theta_w$
- <u>טענה:</u> הרכבה של טרנספורמציות ליניאריות היא טרנספורמציה ליניארית.
- <u>הגדרה:</u> תהי $\varphi: V \to W$ ט"ל
  - φ תיקרא מונומורפיזם אם היא חח"ע.
  - φ תיקרא אפימורפיזם אם היא על.
  - φ תיקרא איזומורפיזם אם היא חח"ע ועל.
- <u>טענה:</u> הרכבה של שני מונומורפיזמים היא מונומורפיזם, הרכבה של שני אפימורפיזמים היא אפימורפיזם והרכבה של שני איזומורפיזמים היא איזומורפיזם.
- <u>טענה:</u> אם φ איזומורפיזם אזי גם φ^{-1} הינה איזומורפיזם.
- <u>טענה:</u> אם פונקציה ט"ל אזי תמונה של סדרה תלויה ליניארית בהכרח תלויה ליניארית.
- <u>טענה:</u> אם φ מונומורפיזם אזי היא מעבירה סדרה בת"ל לסדרה בת"ל.
- <u>גרעין של ט"ל:</u> $\varphi: V \to W$ ט"ל אזי הגרעין שלה מוגדר על ידי: $ker\varphi := \{x \in V | \varphi(x) = \theta_w\}$.
- <u>טענה:</u> φ חח"ע $\Leftrightarrow$ $ker\varphi = \{\theta_v\}$.
- <u>טענה:</u> $\varphi: V \to W$ ט"ל אזי $ker\varphi \subseteq V$ תת מרחב.
- <u>טענה:</u> אם φ ט"ל אזי $Im\varphi \subseteq W$ תת מרחב.
- <u>משפט:</u> תהי $\varphi: V \to W$ ונניח V נוצר סופית, אזי $Im\varphi$ גם נוצר סופית ומתקיים $\dim(ker\varphi) + \dim(Im\varphi) = dimV$.
- <u>למה:</u> אם $e_1, \dots, e_k$ בסיס של $ker\varphi$ ונשלים את הסדרה לבסיס של V באמצעות $e_{k+1}, \dots, e_n$ אזי $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \in W$ בסיס של $Im\varphi$.
- <u>טענה:</u> V, W מ"ו נוצרים סופית, אם קיים איזומורפיזם $\varphi: V \to W$ אזי $dimV = dimW$.
- <u>משפט:</u> יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית מאותו מימד ו- $\varphi: V \to W$ ט"ל. הטענות הבאות שקולות:
  - φ איזומורפיזם
  - φ חח"ע
  - φ על
- <u>הגדרה:</u> נאמר שמ"ו V איזומורפי למרחב W (מעל אותו שדה) אם קיים איזומורפיזם $\varphi: V \to W$. נסמן $V \simeq W$.

- <u>משפט:</u> $dimV = dimW \Leftrightarrow V \simeq W$

<u>מטריצה של טרנספורמציה ליניארית:</u>

- <u>הגדרה:</u> יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית מעל F ו- $dimV = n, dimW = m$.
נקבע בסיסים $[e]$ ב-V ו-$[\xi]$ ב-W. תהי $\varphi: V \to W$ ט"ל, אזי נגדיר $A_{m\times n}$ מטריצה של הטרנספורמציה ביחס לבסיסים $[e]$ ו- $[\xi]$ בצורה הבאה:
העמודה ה-j של המטריצה מוגדרת כעמודת הקואורדינאטות של הוקטור $\varphi(e_j)$ על פי הבסיס ξ (כלומר $C_j = \left[\varphi(e_j)\right]_\xi$).
- <u>משפט:</u> אם A מטריצה של הטרנספורמציה $\varphi: V \to W$ לפי הבסיסים $[e]$ ו- $[\xi]$ (של V ו-W בהתאמה) ו- $x \in V$ כך ש – $[x]_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ אזי מתקיים:
$$A[x]_e := A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\varphi(x)]_\xi$$
- <u>מסקנה מהמשפט:</u> טרנספורמציות ליניאריות מאופיינות באופן יחיד על ידי המטריצה שלהן
- <u>משפט:</u> $\varphi: V \to W$, B מטריצת מעבר מ-$[\xi]$ ל-$[\xi']$ בסיסים של W, ו-C מטריצת מעבר מ-$[e]$ ל-$[e']$ בסיסים של V.
אם A מטריצה של φ ביחס ל-$[e], [\xi]$ ו-A' מטריצה של φ ביחס ל-$[e'], [\xi']$ אזי מתקיים:
$A' = B^{-1}AC$.
- <u>מרחב הטרנספורמציות הליניאריות:</u> יהיו V, W מ"ו מעל אותו שדה נסמן $\mathcal{L}(V, W) = \{\varphi: V \to W \mid \varphi \ is \ a \ linear \ map\}$, אם פעולות של כפל בסקלר וחיבור ט"ל זהו מרחב וקטורי.
- <u>משפט:</u> נסמן $dimV = n, dimW = m$ אזי הפונקציה $T: \mathcal{L}(V, W) \to Mat_{m\times n}(F)$ המוגדרת על ידי $T(\varphi) = A_\varphi$ הינה ט"ל ואיזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.
- <u>מסקנה מהמשפט:</u> $dim\mathcal{L}(V, W) = m * n$

<u>המרחב הדואלי</u>

- <u>הגדרה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , המרחב הדואלי ל-V המסומן V^* הינו קבוצת כל הטרנספורמציות הלינאריות מ-V ל-F. האיברים של המרחב הדואלי נקראים פונקציונליים לינאריים.
הערה: אם V נוצר סופית אזי מתקיים $dimV^* = dimV$
- <u>טענה:</u> כל $\phi \in (\mathrm{F}^n)^*$ הוא מהצורה של $\phi = \phi_a$ עבור $a \in F^n$ כלשהוא. יתר על כן a הוא יחיד.
קווים להוכחה: מראים יחידות על ידי הנחת $\phi_a = \phi_b$ והפעלת שתי הפונקציונליים על הבסיס הסטנדרטי, מקבלים $a = b$. מראים קיום על ידי הגדרת $a_i := \phi(e_i)$ והצבת וקטור כללי בפונקציונל.
- **<u>הבסיס הדואלי:</u>** יהי V מ"ו ממימד סופי מעל שדה F ויהי $e_1, e_2, \dots, e_n$ בסיס ל-V.
לכל $1 \le i \le n$ נגדיר $\epsilon_i \in V^*$ בצורה הבאה: $\epsilon_i(v) = \epsilon_i\left(\sum_j x_j e_j\right) := x_i$ (כלומר הקואורדינטה ה-i של הוקטור על פי הבסיס $[e]$).
- <u>טענה:</u> הקבוצה $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ מהווה בסיס ל-V^*. ועבור כל פונקציונל ב-V^* מתקיים:

$\phi = \phi(e_1)\epsilon_1 + \phi(e_2)\epsilon_2 + \ldots + \phi(e_n)\epsilon_n$. (מוכיחים באמצעות זה שמראים שהקבוצה בת"ל).

- <u>שיטה למציאת בסיס דואלי:</u> אם $b_1, \ldots, b_n$ בסיס ל-V ו- $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ הבסיס הדואלי מתקיים:
$$\begin{pmatrix} \cdots & \epsilon_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \epsilon_n & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = I_n$$
- <u>**המאפס:**</u> יהי V מ"ו מעל שדה F ו- $S \subseteq V$ תת קבוצה, אזי המרחב המאפס של S הינו: $S^0 = \{\phi \in V \mid \forall s \in S \quad \phi(s) = 0\}$, S^0 הינו תת מרחב של המרחב הדואלי.
- <u>טענה:</u> $S_1 \subseteq S_2 \leftarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$
- <u>טענה:</u> לכל משפחה של תתי קבוצות $\{S_\alpha\}$ של V מתקיים: $(\bigcup_\alpha S_\alpha)^0 = \bigcap_\alpha (S_\alpha^0)$
- <u>טענה:</u> $(spanS)^0 = S^0$
- <u>משפט:</u> V מרחב וקטורי ממימד סופי ו-M תת מרחב של V אזיי מתקיים: $dimV = dimM + dimM^0$.

רעיון ההוכחה: בוחרים $e_1, \ldots, e_m$ בסיס ל-M ומשלימים לבסיס ל-V עם $e_{m+1}, \ldots, e_n$. מסתכלים על הבסיס הדואלי ל-$[e]$ ומוכיחים ש- $\epsilon_{m+1}, \ldots, \epsilon_n$ בסיס ל-M^0 (מראים קודם שייכות לקבוצה ואז פרישה) מכך נובע השיוויון המבוקש.

- <u>למה:</u> (הוכח במסגרת ההוכחה של המשפט $dimV = dimM + dimM^0$ בכיתה, ייתכן שצריך להוכיח לבד במבחן): $M \subset V$ תת מרחב ו-$e_1, \ldots, e_m$ בסיס ל-M, $e_{m+1}, \ldots, e_n$ השלמה לבסיס של V. נסמן ב- $[\epsilon]$ את הבסיס הדואלי ל-$[e]$, אזי $\epsilon_{m+1}, \ldots, \epsilon_n$ בסיס ל-M^0.
- <u>**תת מרחב אפסים:**</u> תהי $T \subset V^*$ תת קבוצה, תת מרחב אפסים T_0 הינו : $T_0 = \{x \in V \mid \forall t \in T \quad t(x) = 0\}$.
- <u>טענה:</u> $T_0 \subset V$ הינו תת מרחב לינארי.
- <u>טענה:</u> $T_1 \subset T_2 \leftarrow (T_2)_0 \subset (T_1)_0$.
- <u>טענה:</u> $(\bigcup_\alpha T_\alpha)_0 = (\bigcap_\alpha (T_\alpha)_0$.
- <u>משפט:</u> יהי V נוצר סופית ו- $N \subset V^*$ תת מרחב לינארי, אזי מתקיים: $dimN_0 + dimN = dimV$ (הוכחה באמצעות האיזומורפיזם הקנוני $C: V \to V^{**}$)
- <u>משפט:</u> אם $M \subset V$ תת מרחב אזי $(M^0)_0 = M$.
- <u>משפט:</u> $N \subset V^*$ תת מרחב אזי $(N_0)^0 = N$.
- <u>טענה שניתנה כתרגיל:</u> $S \subset V$ תת קבוצה, אזי $(S^0)_0 = spanS$
- <u>טענה שניתנה כתרגיל:</u> $T \subset V^*$ תת קבוצה, אזי $(T_0)^0$.

<u>**מרחב דואלי שני:**</u>

- <u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו אזי מרחב דואלי שני הינו $V^{**} = (V^*)^*$.
- קיים איזומורפיזם קנוני טבעי $C: V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ אשר מוגדר באופן הבא: $\forall x \in V \ [C(x): V^* \to F, \ \forall \xi \in V^* \ C(x)(\xi) = \xi(x)]$
- <u>טענה:</u> יהי V מ"ו נוצר סופית ו-$T \subset V^{**}$ תת קבוצה אזי $C(T_0) = T^0$ (נשים לב ש- $T_0 \in V$ וגם ש- $T^0 \in V^{**}$ כלומר כל הפונקציונאלים ב-V^{**} אשר מתאפסים על כל הפונקציונאלים ב-T).
  - <u>הוכחה:</u>

    שלב א - $C(T_0) \subseteq T^0$, כלומר לכל $x \in T_0$ מתקיים ש -$\forall t \in T \ \ C(x)(t) = 0$
    אבל נשים לב שמתקיים $C(x)(t) = t(x)$ וגם $t \in T \ \& \ x \in T_0$ לכן על פי הגדרת תת מרחב האפסים $t(x) = 0$.
    שלב ב- $T^0 \subseteq C(T_0)$. יהי $\alpha \in T^0$ נסמן $x = C^{-1}(\alpha) \in V$, לכן מתקיים $\alpha = C(x)$.

נוכיח $x \in T_0$: $\forall t \in T \to C(x)(t) = \alpha(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in T \;\; t(x) = 0 \;\; \Leftrightarrow x \in T_0$,
$\alpha \in T^0 \;\&\; t \in T$ ולכן על פי הגדרת המרחב המאפס $\alpha(t) = 0$ ולכן $x \in T_0$ כנדרש □

<u>מרחב מכפלה פנימית</u>

- <u>הגדרה:</u> מרחב מכפלה פנימית הינו מ"ו V מעל R עם פונקציה $<,>: V \times V \to R$ שמקיימת את התכונות הבאות:
    - <u>ליניאריות ביחס לכל משתנה:</u> $< \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y > = \lambda_1 < x_1, y_1 + \lambda_2 < x_2, y >$ (באופן דומה מתקיים עבור y)
    - <u>סימטריה:</u> $< x, y > = < y, x >$
    - <u>חיובית:</u> $\forall x \in V \;\; < x, x > \geq 0 \;\&\; < x, x > = 0 \to x = \theta$
- <u>הגדרה:</u> מרחב אוקלידי זהו מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.
- <u>נורמה:</u> (אורך) מוגדרת כ-$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
- <u>משפט:</u> תכונות של נורמה:
    - $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
    - $x = \theta \leftrightarrow \|x\| = 0$
    - אי שוויון המשולש $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, יתרה מכך השוויון מתקבל אם ורק אם $x \propto y$
- <u>אי שוויון קושי שוורץ:</u> $|< x, y >| \leq \|x\| \|y\|$, השוויון מתקבל אם ורק אם x ו-y פרופורציוניים. (מהמשפט נובע גם $< x, y > \leq \|x\| \|y\|$ וכאן מתקבל שוויון $\Leftrightarrow$ $x = \lambda y \;\& \lambda > 0$.
- <u>זווית בין וקטורים:</u> הזווית בין שני וקטורים מוגדרת כ- $\angle x, y = \arccos \frac{<x,y>}{\|x\| \|y\|}$
- <u>משפט ריס:</u> יהי V מרחב אוקלידי, אזי כל פונקציונל ליניארי על V הוא מהצורה $\varphi_a(x) := < x, a >$ כאשר $a \in V$ מוגדר באופן יחיד. יתרה מזאת פונקציה $V \to V^*$ אשר מוגדרת $a \mapsto \varphi_a$ היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

<u>אורתוגנאליות:</u>

- <u>הגדרה:</u> וקטורים $x, y \in V$ נקראים אורתוגונאליים אם $< x, y > = 0$.
- <u>סדרה אורתוגונאלית:</u> $x_1, \dots, x_s \in V$ נקראת סדרה אורתוגונאלית אם הוקטורים מאונכים זה לזה כלומר $\forall i \neq j \;\; < x_i, x_j > = 0$.
- <u>סדרה אורתונורמלית:</u> סדרת וקטורים נקראת אורתונורמלית אם היא אורתוגונאלית וגם הנורמה של כל וקטור היא 1, כלומר מתקיים $< x_i, x_j > = \delta_{ij}$
- <u>טענה:</u> אם סדרה של וקטורים שונים מ-θ אורתוגונאלית אזי היא בלתי תלויה ליניארית.
- <u>טענה:</u> יהי $\xi_1, \dots \xi_n \in V$ בסיס אורתונורמלי אזי $\forall x \in V \;\; x = \sum_{i=1}^{n} < x, \xi_i > \xi_i$
- <u>משפט קיום הבסיס האורתונורמלי:</u> בכל מרחב אוקלידי קיים בסיס אורתונורמלי.
- <u>משלים אורתוגונאלי:</u> יהי V מרחב אוקלידי ו-$M \subset V$ תת מרחב. נגדיר משלים אורתוגונאלי של M באופן הבא: $M^{\perp} = \{x \in V | < x, y > = 0 \; \forall y \in M\}$
- <u>משפט:</u> אם $M \subset V$ תת מרחב ליניארי מתקיים $M \oplus M^{\perp} = V$
- <u>מטריצה אורתוגונאלית:</u> מטריצה ממשית $C_{n \times n}$ נקראת אורתוגונאלית אם $C^t C = I_n$.
- <u>משפט:</u> יהי $[e]$ בסיס אורתונורמלי ב-V ו-$[\xi]$ בסיס כלשהו ב-V אזי הבסיס $[\xi]$ הינו אורתונורמלי $\Leftrightarrow$ מטריצת המעבר בין הבסיסים היא אורתוגונאלית.
- <u>טענה:</u> כפל של שתי מטריצות אורתוגונאליות הוא מטריצה אורתוגונאלית.
- <u>תכונות מטריצה אורתוגונאלית:</u>

- אם C מטריצה אורתוגנאלית אזי $\det(C) = \pm 1$
- אם נתבונן ב-R^n במרחב האוקלידי הסטנדרטי אזי $R_1, \dots, R_n$ בסיס אורתונורמלי של R^n
- בנוסף גם $C_1, \dots, C_n$ בסיס אורתונורמאלי ב-R^n (כי גם C^t אורתוגנאלית).

<u>טרנספורמציות במרחבים אוקלידים:</u>

- <u>הגדרה:</u> יהיו V, W מרחבים אוקלידים, ט"ל $T: V \to W$ נקראת איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים אם T איזומורפיזם וגם $\forall x, y \in V < x, y >_V = < Tx, Ty >_W$
- <u>משפט:</u> יהיו V, W מרחבים אוקלידים ו-$dimV = dimW$, $T: V \to W$ ט"ל, אזי: T איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים⇔ $\forall x \in V \ \ \|x\|_V = \|Tx\|_W$
- <u>משפט:</u> V, W מרחבים אוקלידים ו-$T: V \to W$ ט"ל מתקיים:
  - אם T איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים אזי המטריצה של T ביחס לכל זוג של בסיסים אורתונורמלים היא אורתוגונאלית.
  - אם $[e], [\xi]$ בסיסים אורתונרמאליים של V, W בהתאמה והמטריצה של T ביחס ל-$[e], [\xi]$ אורתוגונאלית אזי T איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים.
- <u>טרנספורמציה אורתוגונאלית:</u> $T: V \to V$ איזומורפיזם של מרחבים אוקלידים, נאמר ש-T טרנספורמציה אורתוגונאלית.
- <u>דטרמיננטה של ט"ל:</u> $\varphi: V \to V$ ט"ל, נבחר בסיס כלשהו ל-V. תהי A מטריצה של φ ביחס לבסיס הזה, נגדיר $det\varphi := detA$.
- <u>טענה:</u> $det\varphi$ אינה תלויה בבחירת הבסיס ולכן מוגדרת היטב.
- <u>מסקנה:</u> $\varphi: V \to V$ טרנספורמציה אורתוגונאלית ⇔ $det\varphi = \pm 1$
- <u>מיון של טרנספורמציות אורתוגונאליות $R^2 \to R^2$:</u> כל טרנספורמציה אורתוגונאלית $T: R^2 \to R^2$ היא או סיבוב בזווית מסוימת או שיקף ביחס לציר מסוים.
- <u>מטריצת סיבוב בזווית θ:</u> $\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ (ביחס לבסיס הסטנדרטי, נגד כיוון השעון)
- <u>מטריצת שיקוף ביחס לציר:</u> $\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{bmatrix}$ הציר בזווית $\frac{\theta}{2}$ ביחס לווקטור הבסיס e_1.