TEL AVIV UNIVERSITY
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES
SCHOOL OF PHYSICS AND ASTRONOMY

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
בית הספר לפיזיקה ולאסטרונומיה

24.2.2004

ב' באדר תשס"ד

מבחן בפיסיקה קלאסית 1

סמסטר א' תשס"ד

מועד א'

המרצה: פרופ' יחיאל ליכטנשטט

מתרגלים: מר חן יעקובי ומר אמיר סגינר

משך המבחן שלוש שעות.

חומר עזר מותר:

מחשב כיס ודף נוסחאות אחד בלבד

עליכם לענות על שלוש שאלות בלבד

יש לענות על השאלות בגוף המבחן!
המחברות משמשות בתור טיוטה ולא תיבדקנה

מס' ת.ז 309059137

מספר מחברת 64

הקיפו בעיגול את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות

1 2 3 4

ציון: 33 33 ~~27~~ 33

~~88~~/100

ציון סופי: 100

5.3.04

95 כן

בהצלחה

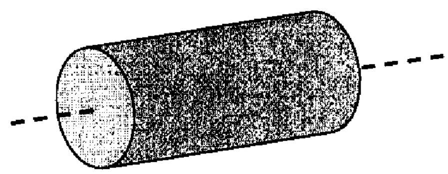
נוסחאות שימושיות:

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית מהצורה : $\dot{x} = \omega x + K$ (כאשר K קבוע) הוא $x = Ae^{\omega t} - K/\omega$

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית מהצורה : $\ddot{x} = -\omega^2 x$ (כאשר ω ממשי) הוא $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

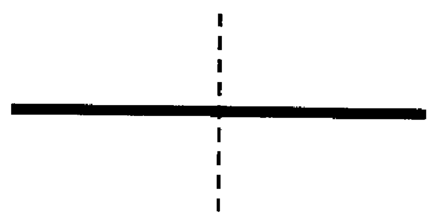
מומנטי התמד :

גליל בעלת מסה M, רדיוס R וגובה H:



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

מוט דק בעל מסה M ואורך L:

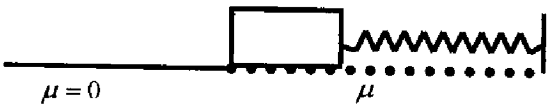


$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

שאלה 1

גוף אחיד בעל אורך L ומסה M נע על משטח חלק במהירות v_0. הגוף מגיע למשטח מחוספס בעל מקדם חיכוך $\mu_s = \mu_k = \mu$ שעליו מונח קפיץ חסר מסה הקשור לקיר. הקפיץ מכסה את כל החלק המחוספס כמתואר בשרטוט. הגוף פוגע בקפיץ ונדבק אליו.

א. מה צריכה להיות המהירות v_0 כך, שכאשר הגוף ייעצר בפעם הראשונה (כאשר המהירות הרגעית שלו תתאפס לראשונה), כולו יהיה מונח על המשטח המחוספס כמתואר בשרטוט?



סעיף א: הגוף נמצא במנוחה רגעית וכולו על המשטח המחוספס

ב. בהינתן שהתנאי בסעיף הקודם אכן מתקיים, מהו מקדם החיכוך המקסימלי שעדיין יאפשר חזרה של הגוף (תנועה לכיוון ההפוך)?

ג. בהנחה שהתנאי בסעיף א מתקיים ומקדם החיכוך קטן מספיק כך שהגוף נע גם בכיוון ההפוך, מה תהיה מהירות הגוף v כאשר הוא יהיה מונח כולו על המשטח החלק לאחר שהוא התחיל לנוע בכיוון ההפוך כמתואר בשרטוט?

סעיף ג: הגוף נמצא כולו על המשטח החלק והוא נע במהירות v

ד. הגוף ממשיך להיות מחובר לקפיץ גם כאשר הוא נע על המשטח החלק ולכן הקפיץ מחזיר את הגוף לכיוון המשטח המחוספס. הגוף עוצר (באופן רגעי) כך שחלקו על המשטח החלק וחלקו על המשטח המחוספס. מה יהיה האורך של חלק הגוף המונח על המשטח המחוספס (l בשרטוט) כאשר הגוף ייעצר על המשטח המחוספס בפעם השניה כמתואר בשרטוט?

סעיף ד: הגוף עוצר רגעית, כך שחלקו על המשטח החלק וחלקו על המשטח המחוספס

א.

$$f = -\mu_1 N \qquad N = \frac{x}{L} \cdot mg$$

של החלק המחוספס — חלק המחוספס

$$W_f = \int_0^L f\,dx = \int_0^L \frac{x}{L} \cdot mg(-\mu)\,dx = -\frac{\mu m g}{L}\,\frac{1}{2}x^2\Big|_0^L = -\frac{1}{2}\mu m g L$$

18/18

$$W = \Delta E_k + \Delta E_p \qquad \Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}MV_0^2 = -\frac{1}{2}MV_0^2$$

$$\Delta E_p = \int_0^L kx\,dx = \frac{1}{2}kL^2$$

$$-\cancel{\tfrac{1}{2}}\mu m g L = -\cancel{\tfrac{1}{2}}MV_0^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}kL^2 \qquad MV_0^2 = \mu m g L + kL^2$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{\mu m g L + kL^2}{m}}}$$

ב. במצב הזה כח החיכוך מבטל יותר עבודה ~~[illegible]~~
כדי שלא הגוף יחזור בחזרה לקפיץ ... הקפיץ צריך
להיות שווה בדיוק לעבודה שכוח החיכוך רק לאנרגיה הקינטית ...

$$W_f = -\frac{1}{2}\mu m g L = -\frac{1}{2}kL^2 \qquad \boxed{\mu_1 = \frac{kL}{mg}}$$

4/4

ג. בחזרה המסה מתחילה מנקודה 0 למהירות v' כשהקפיץ רפוי
המשך החלק

$$W_f = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$W_f = -\frac{1}{2}\mu m g L$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv'^2 - 0$$

$$\Delta E_p = \int_L^0 kx\,dx = -\frac{1}{2}kL^2$$

8/8

$$-\frac{1}{2}\mu m g L = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}kL^2$$

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}kL^2 - \frac{1}{2}\mu m g L \qquad \boxed{v' = \sqrt{\frac{kL^2 - \mu m g L}{m}}}$$

המשך

3. נסתכל על המסה מרגע לפני העלייה על המשטח המחוספס
עד שהיא נעצרה

$\frac{3}{3}$

$W_f = \Delta E_k + \Delta E_p$

$f = -\mu N$ $\qquad N = \frac{x}{L} mg \qquad W_f = \int_0^{\ell} -\mu \frac{x}{L} mg\,dx = -\frac{\mu mg}{L}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\ell} =$

$= -\frac{1}{2}\mu mg\frac{\ell^2}{L}$

$\Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}mv'^2$

$\Delta E_p = \int_0^{\ell} kx = \frac{1}{2}k\ell^2$

$-\frac{1}{2}\mu Mg\frac{\ell^2}{L} = -\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}k\ell^2$

$\frac{1}{2}k\ell^2 + \frac{1}{2}\mu Mg\frac{\ell^2}{L} = \frac{1}{2}mv'^2$

$\ell^2\left(k + \frac{\mu M}{L}g\right) = Mv'^2 = M\frac{kL^2 - \mu MgL}{M} = L^2\left(k - \frac{\mu Mg}{L}\right)$

$\ell^2 = L^2\left[\frac{k - \frac{\mu mg}{L}}{k + \frac{\mu mg}{L}}\right] = L^2\left[\frac{kL - \mu mg}{kL + \mu mg}\right]$

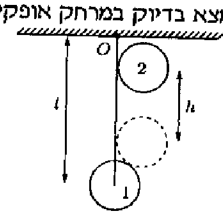
$$\boxed{\ell = L\sqrt{\frac{kL - \mu Mg}{kL + \mu Mg}}}$$

$\frac{33}{33}$

אוניברסיטת תל אביב
בית הספר לפיסיקה ואסטרונומיה

שאלה 2.

נתונות שתי דיסקות (חלקות לגמרי) זהות בעלות מסה m ורדיוס R - המסה מפולגת אחיד בכל דיסקה. את דיסקה 1 תולים מהתיקרה בעזרת חוט חסר מסה באורך l (האורך נמדד מהתיקרה ועד למרכז הדיסקה). כעת משחררים את דיסקה 2 (אותו רדיוס R ומסה m כמו 1), כך שמרכזה נמצא בדיוק במרחק אופקי R מהחוט וכך שגובה הנפילה, עד להתנגשות, הוא h (ראו שרטוט).



(א) בעת ההתנגשות, אילו רכיבים של התנע (הקווי) הכולל (של שתי הדיסקות יחד) נשמרים, ואילו לא? נמקו.

(ב) בהנחה שההתנגשות בין הדיסקות היא אלסטית, מצאו את המהירות (גודל וכיוון) של שתי הדיסקות מייד לאחר ההתנגשות. (רמז: עבור דיסקה 2 ניתן למצוא עבור ההתנגשות את $\frac{\Delta p_y}{\Delta p_x}$, היחס בין השינוי בתנע בכיוון y לבין השינוי בתנע בכיוון x.)

(ג) מצאו את התנע הזוויתי L_1, ביחס לנק' התליה O, של דיסקה 1, מייד לאחר ההתנגשות.

$\frac{7}{7}$

א. בזמן ההתנגשות, בציר y פועל כח חיצוני - המתיחות של החוט)
לכן התנע בציר y לא נשמר ✓

$\frac{dP_y}{dt} = F_{ext} \neq 0 \Rightarrow P_y \neq const$

(קיים גם כח הכובד אבל מכיוון שגודלו סופי
השינוי בתנע שהוא גורם בזמן dt של ההתנגשות הוא אפסי

P_{mg} ($dP_{mg} = mg\,dt \rightarrow 0$

בציר x לא פועלים כוחות חיצוניים ולכן מתקיים
שימור תנע

$\frac{dP_x}{dt} = 0 \Rightarrow P_x = const$

(כוחות הנורמל הפנימיים בין הדיסקות, מתבטלים)

המשך בדף הבא ✓

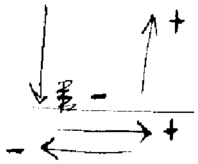
ג. סימון

$\frac{20}{20}$

V_{2y} - מהירות הדסקה 2 בציר ה-y לפני ההתנגשות
u_{1x} - מהירות הדסקה 1 בציר x אחרי ההתנגשות
u_{2x} - מהירות הדסקה 2 בציר x אחרי ההתנגשות
u_{2y} - מהירות הדסקה 2 בציר y אחרי ההתנגשות

לפני ההתנגשות מהירות הדסקה הקיימת היא V_{2y}

$V^2=V_0^2+2a\Delta x$ $\quad V_{2y}^2=2gh \quad V_{2y}=\sqrt{2gh}$



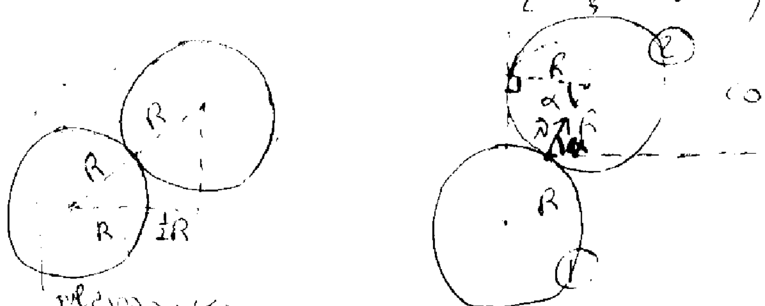
שימור תנע בציר ה-x

I $\quad m\cdot 0+m\cdot 0=mu_{1x}+mu_{2x}$ ✓

שימור אנרגיה (התנגשות אלסטית)

II $\quad \frac{1}{2}mV_{2y}^2=\frac{1}{2}m(u_{2x}^2+u_{2y}^2)+\frac{1}{2}mu_{1x}^2$ ✓

[לדסקה 1 אחרי ההתנגשות יש מהירות בציר ה-x בלבד מכיוון
שהכוח של משטח מהירות ... בציר ה-y וכוח המשטח על דסקה 2



$\cos\alpha=\frac{R}{2R}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=60^\circ$

הכוח הנורמל חוץ מכוח הכובד שפועל על דסקה (2) בזמן ההתנגשות (הכוח הנורמל)
לכן אחראי לשינוי בתנע של הדסקה (2)

$\vec{N}_x=N\cos\alpha\,\hat{x} \qquad \Delta\vec{P}_x=N\cos\alpha\,dt\,\hat{x} \qquad \frac{|\Delta\vec{P}_x|}{|\Delta\vec{P}_y|}=\cot\alpha$

$\vec{N}_y=N\sin\alpha\,\hat{y} \qquad \Delta\vec{P}_y=N\sin\alpha\,dt\,\hat{y}$

$u_{2x}-0$

III $\quad \frac{\Delta P_y}{\Delta P_x}=\tan\alpha$ ✓ $\qquad \frac{m\Delta V_y}{m\Delta V_{2x}}=\frac{u_{2y}-V_{2y}}{0-u_{2x}}=\tan\alpha=\tan 60=\sqrt{3}$

הפתרון של מערכת המשוואות I II III הוא:

$u_{2x}=\sqrt{\frac{24}{25}gh}$ ✓ $\quad u_{1x}=-\sqrt{\frac{24}{25}gh}$ ✓ $\quad u_{2y}=\sqrt{\frac{2}{25}gh}$ ✓

לכן מהירות הדסקה 2 לאחר ההתנגשות היא:

$$\vec{u}_2 = \sqrt{\frac{24}{25}gh}\,\hat{x} + \sqrt{\frac{2}{25}gh}\,\hat{y}$$

ומהירות הדסקה 1 לאחר ההתנגשות היא:

$$\vec{u}_1 = -\sqrt{\frac{24}{25}gh}\,\hat{x}$$

6/6

~~לדסקה ה ישנה מהירות בכיוון ה-x ישנו כוח שיקום להיות מאונך למהירות, זווית המתיחות של החוט לכן הדסקה תתחיל לנוע בתנועה מעגלית סביב נקודה O.~~

מיד לאחר ההתנגשות לדיסקה ישנה מהירות בכיוון ה X
מהירות זו ניצבת למוט שהוא ניצב עם הדיסקה היא
מסתובבת בתנועה מעגלית סביב O. מכיוון שהדיסקות חלקות, בזמן
ההתנגשות הן לא מפעילות כוחות חיכוך אחת על השנייה, לכן אין
מומנט כלל על הדיסקה יחסית למרכז המסה ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{r} \parallel \vec{F}$)
והדיסקה לא מסתובבת סביב מרכז המסה שלה.

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times (M\vec{V}_{cm})$$

$$\vec{L}_{cm} = 0$$
אין סיבוב סביב מרכז המסה

$$\vec{r}_{cm} \times M\vec{V}_{cm} = \underbrace{-\ell\hat{y}}_{} \times M u_{1x}\hat{x} = M u_{1x}\ell\hat{z}$$

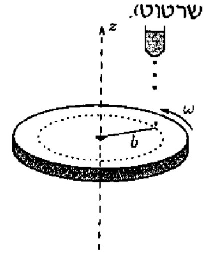
דסקה נקודה-מ.מ במרכז, ℓ מרחק המרכז מנקודה O

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{cm} \times (M\vec{V}_{cm}) = M u_{1x}\ell\hat{z} = -\sqrt{\frac{24}{25}gh}\,M\ell\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = -\sqrt{\frac{24}{25}gh}\,M\ell\hat{z}}$$

שאלה 3.

דיסקה אופקית בעלת מסה M, מומנט התמד I_0 ורדיוס חיצוני R מסתובבת במהירות זוויתית ω_0 סביב ציר חלק שמסתו זניחה והעובר במרכזה. ברגע $t = 0$ מתחילים לשפוך על הדיסקה חול בקצב אחיד j_0 (מסה ליח' זמן) כך שהחול הנשפך נופל במרחק b מציר הסיבוב ומייד נדבק לדיסקה (ראו שרטוט).



(א) מצאו, כפונקציה של הזמן, את מומנט ההתמד I (סביב הציר) של הדיסקה יחד עם החול שעליה. הניחו כי ב- $t = 0$ אין על הדיסקה חול.

(ב) מהו סכום המומנטים בכיוון $\hat{z}$ הפועלים על הדיסקה?

(ג) מצאו את המהירות הזוויתית ω של הדיסקה כפונקציה של הזמן.

א. מהגדרה

$$I = \sum m_i \underbrace{R_i^2}_{\text{מרחק אנך מציר הסיבוב}}$$

$$I_{\text{מערכת דסקה וחול}} = \sum m_i R_i^2 = \underbrace{\sum m_i R_i^2}_{\text{דסקה}} + \underbrace{\sum m_i R_i^2}_{\text{חול}} = I_0 + \underbrace{\sum m_i R_i^2}_{\text{חול}}$$

$$\underbrace{\sum m_i R_i^2}_{\text{חול}} \xrightarrow{\text{בגבול הרצף}} \int dm \underbrace{R^2}_{\text{קבוע}} = m b^2$$

$$\frac{dm}{dt} = j_0 \qquad dm = j_0 dt \Rightarrow m = m_0 + j_0 t \qquad m(t=0) = m_0 = 0$$

$$m = j_0 t \qquad I_{\text{חול}} = b^2 j_0 t$$

$$\boxed{I_{\text{דסקה+חול}} = I_0 + b^2 j_0 t}$$

✓

[illegible]

המשך בדף הבא

~~ב. נסתכל על התנע הזוויתי של המערכת הכוללת את הדסקה והחול~~
~~בשלב [?] ומסה dm של חול שניחתת בזמן dt על הדסקה~~
~~נגדיר וקטור $\hat{\theta}$ וקטור יחידה המשיק למעגל~~
~~שרדיוסו b ומרכזו מתלכד עם מרכז הדסקה ונוגעת~~
~~בנקודה הנ... נקודת הנפילה של החול על הדסקה ($\hat{\theta}$ בכיוון הסיבוב)~~
~~התנע הזוויתי והמומנטים מחושבים~~
~~ביחס לנקודה מרכז הדסקה.~~

~~$\vec{L}(t) = I$~~

לפי החוק השני של ניוטון המומנט הפועל על הדסקה בגלל
החול שווה בגודלו ומנוגד בכיוונו למומנט שמפעילה הדסקה על החול.
נגדיר וקטור $\hat{\theta}$ וקטור יחידה המשיק למעגל שרדיוסו b
ומרכזו מתלכד עם מרכז הדסקה. נקודת ההשקה היא נקודת
הנפילה של החול על הדסקה ($\hat{\theta}$ קבוע בזמן)
וכיוונו בכיוון הסיבוב

נסתכל על התנע הזוויתי של מסת חול dm רגע לפני הנפילה ורגע
אחרי

$$\vec{L}(t) = \vec{r} \times \vec{p} = b\, dm \cdot v_i \cdot \hat{\theta} \qquad [\vec{p} = mv]$$

מהירות הנפילה לפני ההתנגשות

$$\vec{L}(t+dt) = \vec{r} \times \vec{p} = dm\, \omega b^2 \hat{z}$$

$$d\vec{L} = dm\, \omega b^2 \hat{z} - dm\, b v \hat{\theta} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dm}{dt} \omega b^2 \hat{z} - \frac{dm}{dt} b v \hat{\theta} = \vec{\tau}$$

המומנט הפועל על החול בכיוון ציר z הוא $\vec{\tau}_z = \frac{dm}{dt} \omega b^2 \hat{z}$

לכן לפי החוק השלישי של ניוטון על הדיסקה פועל בכיוון ציר z מומנט של:

$$\boxed{\vec{\tau}_z = -\frac{dm}{dt} \omega b^2 \hat{z} = -j_0 \omega b^2 \hat{z}}$$

אין חוק ש.ש.
על מומנטים
בפשטות

המשך מאחורי הדף

לא המומ' של

ג. נסתכל על התנע הזוויתי של מערכת הדסקה עם החול שעליה ושמה dm שנוחת על הדסקה בזמן dt

$$\vec{L}(t) = I\vec{\omega} + dm\, b v \hat{\theta}$$

$$\vec{L}(t+dt) = I(\vec{\omega}+d\vec{\omega}) + dm\, \omega b^2 \hat{z}$$

$$d\vec{L} = \cancel{I\vec{\omega}} - \cancel{I\vec{\omega}} + I\, d\vec{\omega} + dm\, \omega b^2 \hat{z} - dm\, b v \hat{\theta}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{dm}{dt}\omega b^2 \hat{z} - \frac{dm}{dt} b v \hat{\theta} = \vec{\tau}_{ext} = -mg\hat{\theta}$$

?

נסתכל על הרכיבים בכיוון z

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{dm}{dt}\omega b^2 \hat{z} = 0 \qquad \vec{\omega} = \omega\hat{z} \Rightarrow d\vec{\omega} = d\omega\hat{z}$$

בקואורדינטות גליליות $\Downarrow$

$$\hat{z}: \quad I\frac{d\omega}{dt} + \frac{dm}{dt}\omega b^2 = 0 \qquad I\dot{\omega} + j_0\omega b^2 = 0$$

$$I = I_0 + b^2 j_0 t \qquad (I_0 + b^2 j_0 t)\dot{\omega} + b^2 j_0 \omega = 0$$

13/13

$$(I_0 + b^2 j_0 t)\dot{\omega} + b^2 j_0 \omega = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d\left[(I_0 + b^2 j_0 t)\omega\right] = 0$$

$$\underbrace{(I_0 + b^2 j_0 t)\omega = K}_{\text{קבוע}} \qquad \omega = \frac{K}{I_0 + b^2 j_0 t}$$

$$\omega(t=0) = \frac{K}{I_0} = \omega_0 \rightarrow K = I_0\omega_0$$

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0 I_0}{I_0 + b^2 j_0 t}}$$

שאלה 4

גליל מלא בעל רדיוס R ומסה M מונח על שטיח. בזמן $t=0$ מתחילים למשוך את השטיח ימינה בתאוצה קבועה a כך שהגליל מתגלגל על השטיח ללא החלקה. התווך בו נמצא הגליל מפעיל עליו כח הפרופורציוני למהירות שלו ומנוגד לכיוונה. כלומר כאשר מרכז המסה של הגליל נע במהירות v פועל על הגליל כח השווה ל- βv (כאשר β קבוע חיובי ידוע) בכיוון הפוך לכיוון המהירות שלו (ניתן להניח שהכח המעקב פועל בצורה אחידה על הגליל ולכן אין לו מומנט ביחס למרכז המסה של הגליל). מקדם החיכוך הסטטי בין השטיח לבין הגליל הוא μ.

א. מהו מקדם החיכוך המינימלי בין השטיח והכדור שיאפשר תנועת גלגול ללא החלקה על גבי השטיח?
(הדרכה: החיכוך המקסימלי מתקבל בתחילת התנועה כלומר ב- $t=0$).

ב. בזמן $t=0$ נותנים לגליל מהירות התחלתית ומהירות זוויתית (לא נתונות), כך שהגליל מתגלגל על השטיח ללא החלקה **במהירות קווית קבועה** ביחס לקרקע (לא ביחס לשטיח). מצאו את המהירות הזוויתית של הגליל כתלות בזמן (הניחו שהשטיח מתחיל לנוע ממנוחה).

ג. מצאו את המהירות הקווית של הגליל בכל רגע ביחס לקרקע (לא ביחס לשטיח) אם נתון שהגליל מתחיל לנוע ממנוחה ביחס לקרקע והוא נע ללא החלקה (הניחו שהשטיח מתחיל לנוע ממנוחה).