שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית (88-526)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר א', מועד ב': 31.3.11
<u>יש לנמק את כל התשובות. משך הבחינה: שעתיים וחצי.</u>

1. הבעיה הזו עוסקת בעקומות במרחב אוקלידי.
   1. הגדר פרמטר במהירות יחידה של עקומה.
   2. התבונן בעקומה $\alpha(t)=(12\cos t,\ 13-13\sin t,\ -5\cos t)$. מצא פרמטר במהירות יחידה s של העקומה.
   3. חשב את העקמומיות של העקומה בחלק ב'.
2. תהי $\gamma\subseteq\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ עקומה מוגדרת על ידי $F(x,y)=0$ כאשר $\nabla F\neq 0$ בכל נקודה של עקומה γ. תהי $\alpha:[0,L]\to\mathbb{C}$ פרמטריזציה במהירות יחידה של γ. יהי $n(s)$ וקטור נורמלי לעקומה γ בנקודה $\alpha(s)$.
   1. הגדר עקמומיות $k(s)$ של γ בנקודה $\alpha(s)$ ובטא $k(s)$ בעמצאות של $n(s)$.
   2. נניח שמתקיים $k(s)>0$ לכל s וחשב את $\int_0^L k(s)ds$.
   3. נתבונן בעקומה γ_1 מוגדרת על ידי $\gamma_1=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|-b=0\}$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}^+$. חשב את האינטגרל של עקמומיות על γ_1.
   4. נתבונן בעקומה $\gamma_2=\{z\in\mathbb{C}:(|z-a|-b)(|z+a|-b)=0\}$, כאשר $b<a$. חשב את האינטגרל של עקמומיות על γ_2.
3. הבעיה הזו עוסקת במשטחים במרחב אוקלידי. נניח ש $g_{ij}=L_{ij}=0$ אם $i\neq j$.
   1. הגדר עקמומיויות ראשיות k_1 ו- k_2.
   2. מצא בסיס מתאים ובטא את העתקת Weingarten בתור מטריצה.
   3. בטא את היחס k_1/k_2 כפונקציה במקדמים של תבניות יסודיות ראשונה ושניה.
   4. חשב את המנה במקרה של משטח סיבוב המתקבל על-ידי סיבוב של פרבולה $x=z^2+\frac{1}{4}$ מסביב לציר z.
4. בקואורדינטות $(u^1,u^2)=(x,y)$, תהי $f(x,y)=\frac{4}{y}$. התבונן במטריקה $f(x,y)^2\left(dx^2+dy^2\right)$.
   1. מצא תחום מקסימלי שבו מוגדרת המטריקה .
   2. חשב את המקדמים Γ_{ij}^1 של המטריקה
   3. חשב את העקמומיות של גאוס כפונקציה $K=K(x,y)$ של המטריקה.
5. הבעיה הזו עוסקת במשטחים.
   1. בטא את מקדם Γ_{ij}^k באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij}.
   2. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma_{ij}^l x_l+L_{ij}n\right)$ הוא סימטרי ב- j וב- k. מצא יחס בין L_{ij} לבין $L^k{}_l$.
   3. בטא את הביטוי $L_{i[j}L^k{}_{l]}$ במונחים של מקדמי מטריקה ונגזרותיה.

בהצלחה!