אינפי II - הרצאה II
5.3.2013

פרטי המרצה והקורס: ד"ר מיכאל שיין mschein@math.niu.ac.il. חדר 214 בבניין מתמטיקה, ומומלץ לקבוע שעות קבלה ע"י תיאום מראש במייל. מבנה הציון, הבחנים, ותרגילי הבית הם בהתאם לסמסטר א' בקורס אינפי1.

1. <u>אינטגרלים לא מסויימים:</u>

כולנו מכירים אותם מהתיכון, אבל היום נפתח את התיאוריה כדי להגדיר ולהגיע אליו.

<u>הגדרה</u>: תהי פונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע X. אזי פונקציה קודמת של f הינה פונקצייה המקיימת $F(x)$ כך שמתקיים:

1. $F(x)$ גזירה בכל X
2. $F'(x) = f(x)$ לכל x בX.

<u>הגדרה</u>: תהי $f(x)$ פונקציה. האינטגרל הלא מסויים של f(x) הוא קבוצת הפונקציות הקדומות שלה. מסמנים $\int f(x)dx$.

1.1 טענה: תהיינה $\mathrm{F}(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות של *f(x)* אזי קיים קבוע *C* כך ש $G(x) = F(x) + C$ לכל *x* בתחום.

הוכחה: יהי $H(x) = G(x) - F(x)$. וידוע ש לכל x_0 מתקיים $H'(x_0) = G'(x_0) - F'(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$

H פונקציה קבועה ע"פ לגרנג'. לכן קיים *C* כך ש $H(x) = C = G(x) - F(x)$ וע"י העברת אגפים נקבל את הדרוש.

מ.ש.ל. ■

1.2 טענה: תהי *f(x)* פונקציה, ו*F(x)* איזושהיא פונקציה קודמת של *f(x)*.

אזי $\int f(x)dx = \{F(x) + C | C \in R\} \equiv F(x) + C$.

הוכחה: אנו יודעים ע"פ הגדרה כי עבור $G(x) \in \int f(x)dx$ מתקיים כי הוא מצורת $F(x) + C$ ולכן הצד השמאלי מוכל בימני.

בכיוון השני, ברור כי הנגזרת של כל $G(x) \in \{F(x) + C | C \in R\}$ הוא *f(x)* ולכן גם אגף ימין מוכל בשמאל, וקיבלנו

מ.ש.ל. ■

<u>טכניקות של אינטגרציה:</u>

<u>אינטגרציה בהצבה</u>: תהי *f(x)* פונקציה מוגדרת בתחום *U* ו*u(x)* פונקציה מוגדרת בתחום *X* כך ש $u(x) \in U$ לכל *x* בX. נניח ששתי הפונקציות גזירות. אזי $\frac{d}{dx}\left(F\big(u(x)\big)\right) = \frac{d}{du}F\big(u(x)\big)\frac{d}{dx}u(x) = F'\big(u(x)\big)u'(x)$ כאשר $F' = \frac{dF}{du}, u' = \frac{du}{dx}$.

דוגמא 1: חשב את $\int x\, e^{x^2} dx$

פתרון: נגדיר $u(x) = x^2$ ואז $u'(x) = 2x$. וגם נגדיר $F(u) = e^u, F'(u) = e^u$.

ניתן לרשום את האינטגרל כך $\int x\, e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2}u'(x)F'\big(u(x)\big)dx$ ולכן האינטגרל ע"פ אינטגרציה בהצבה מתקבל ישירות והוא $\int x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

הרעיון הכללי הוא למצוא פונקציה שמקיימת $du = u'(x)dx$ כך שהאינטגרל יהיה מהצורה $\int u'(x)F'\big(u(x)\big)dx$, את $\mathrm{F}(u)$ אנו יודעים, ולכן האינטגרל מתקבל והוא $\int f(x)dx = F\big(u(x)\big) + C$.

דוגמא 2: חשב את $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

פתרון: נציב $u = \cos x$ ונקבל $du = -sinx\, dx$.

נציב זאת באינטגרל על מנת לקבל את $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|cos\, x| + C$ ופתרנו.

דוגמא 3: $\int 3x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx$.

פתרון: נגדיר $u = x^2 - a^2$ ונקבל $du = 2xdx$. נציב הכל בביטוי ונקבל $\int \frac{3}{2}\sqrt{u}\, du = \frac{3}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = (x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + C$

דוגמא 4: $\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx$.

פתרון: בהכרח ש$x\in[-a,a]$ לכן אפשר לומר ש$x=a\sin\theta$, (הגדרת המשתנה היא $\theta=\arcsin\frac{x}{a}$) והאינטגרל הופך ל $\int \sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}\ acos\theta\ d\theta$, ע״י הצבת זהות טריגונומטרית וחישובים פשוטים האינטגרל הופך ל $a^2\int\cos^2\theta\ \ d\theta$

ומכאן מציבים ש$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$. מתקבל האינטגרל $\frac{1}{2}a^2\int cos\ 2\theta+1\ d\theta\ =\frac{1}{2}\ a^2\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+C$

וכעת ניתן להציב את $\theta=\arcsin\frac{x}{a}$ ולקבל $\int\ \sqrt{a^2-x^2}\ dx\ =\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$.

דוגמא 5: $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$. נגיע לכך ע״י הגדרת $x=a\sin\theta$, והצבתו באינטגרל. מתקבל האינטגרל הבא

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{a\ cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}}d\theta=\int 1d\theta=\arcsin\frac{x}{a}+C$. ופתרנו.

<u>הגדרה</u>: $\sinh x=sh\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $cosh\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

ניתן לגזור את *cosh* ולקבל את *sinh* ולגזור את *sinh* על מנת לקבל את *cosh*, בדומה לסינוס וקוסינוס המוכרים לנו.

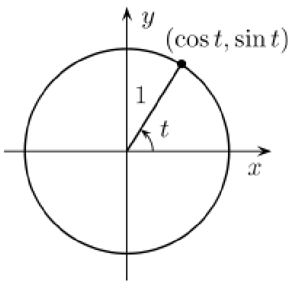
מתקבל כי $\sinh^2 x+1=\cosh^2 x$.

דוגמא 6: $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$, וזה טוב לפתור את זה אחרי ההגדרה האחרונה שלנו.

פתרון: נקבל את האינטגרל שיבוא לידי $\mathrm{x}=a\mathrm{sinh}\theta$, $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\theta+\mathrm{C}$ והבעייתיות מתקבלת בהבעת θ ע״י *x*. נחפש את הפונקציה ההופכית ל*sinh*, ונקרא לה *Arsinx*. נקבל $\frac{x}{a}=sinh\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$ ונסמן את $\theta=lny$ ואחרי הצבה נקבל משוואה ריבועית $y^2-\left(\frac{2x}{a}\right)y-1=0$, ואנו מעוניינים רק בשורש החיובי מאחר ואקפוננט תמיד חיובי.

לכן $y=\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}$, ו$\theta=lny$, ולכן מציבים את זה, למרותש מדובר בביטוי מכוער.

התשובה הסופי היא $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$.



לאחר שלמדנו בתיכון על הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר זווית, ראינו גם שניתן להרחיב זאת למעגל שנקרא מעגל היחידה, המוצג משמאל.

זהויות טריגונומטריות שחשוב לדעת ע״פ המלצת המרצה:

א. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

ב. $\sin 2\theta=2sin\theta cos\theta$.

ג. $cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$.

כל השאר נובעים מאלה, וניתן לראות זאת ע״י אלגברה פשוטה. ☺