סדרות ב- $\mathbb{R}^n$

אורפז תורג'מן orpaz.biu@gmail.com
תא 417 האתר: hl2.biu.ac.il

הגדרה

נורמה של וקטור $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

תכונות

* $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$
* $\forall x\in\mathbb{R}^n: \|x\|\ge 0$
* $\|x\|=0 \iff x=0$
* $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
* $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$

הגדרה

גבול של סדרה: תהי $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ סדרה של וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$, $L\in\mathbb{R}^n$ ייקרא גבול של הסדרה, ויסומן $L=\lim_{m\to\infty} x^m$ או $x^m \to L$
אם"ם $\forall \varepsilon>0: \exists \bar{m}: \forall m\ge \bar{m}:$ $\|x^m - L\| < \varepsilon$

המשפט המרכזי לגבול סדרה

תהי סדרה $x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$, אזי $x^m \to L$ אם"ם לכל j: $x_j^m \to L_j$

דוגמאות

1) $\sin\frac{1}{n} \to 0$ וגם $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n \ln 2} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n \ln^2 2} = 0$

לכן $(\sin\frac{1}{n}, \frac{n^2}{2^n}) \to 0$

2) $tg\frac{1}{n} \to 0$, אבל הסדרה $\cos(\frac{\pi}{2}n)$ מתבדרת כי יש לה יותר מגבול חלקי אחד. לכן $(tg\frac{1}{n}, \cos(\frac{\pi}{2}n))$ מתבדר.

הגדרות

יהי $r>0$, $a\in\mathbb{R}^n$ כדור פתוח ב-$\mathbb{R}^n$ יהיה $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|<r\}$
וכדור סגור יהיה $\bar{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|\le r\}$

[redacted]

אם $A\subset\mathbb{R}^n$, נאמר ש- $p\in\mathbb{R}^n$ היא נק' הגבול (הצטברות) של A
אם מתקיים: $\forall\varepsilon>0: \exists x\in A: 0<\|x-p\|<\varepsilon$
הגדרה שקולה: $p\in \mathrm{Lim}A \iff \forall\varepsilon>0:\exists x\in A: x\in B(p,\varepsilon)\setminus\{p\}$

דוגמאות

1) $\mathrm{Lim}\underbrace{(0,1)}_{A}=[0,1]$

2) $A=\{0\}$ $\qquad \mathrm{Lim}A=\emptyset$

3) $A=(0,1)\cup\{2\}$ $\qquad \mathrm{Lim}A=[0,1]$

הגדרה

אם $a\in A$ אבל $a\notin \mathrm{Lim}A$ אז a נקודה מבודדת.

הגדרה

גבול של פונק' ב-$\mathbb{R}^n$:
תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$, $A\subset\mathbb{R}^n$, $p\in\mathrm{Lim}A$. נאמר ש- $L\in\mathbb{R}^m$
היא הגבול של f ב-p אם:
$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0: x\in A, 0<\|x-p\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-L\|<\varepsilon$$
הגדרות שקולות:

1) $\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0: x\in A\cap(B(p,\delta)\setminus\{p\}) \Rightarrow f(x)\in B(L,\varepsilon)$

2) $\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0: f(A\cap(B(p,\delta)\setminus\{p\}))\subset B(L,\varepsilon)$

בעצם הגבול קיים אם עבור כל כדור שנבחר ב-$\mathbb{R}^m$ ברדיוס ε קטן ככל שיהיה קיים תחום (כדור) ב-A ברדיוס δ.

משפט היינה

$A\subset\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^m$, $p\in\mathrm{Lim}A$.
$L=\lim_{x\to p} f(x) \iff$ לכל סדרה $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, $x^n\in A\setminus\{p\}$ עבורה $\lim_{n\to\infty} x^n=p$
מתקיים גם $L=\lim_{n\to\infty} f(x^n)$

טכניקות לחישוב גבולות

1) מציאת הגבול ע"י הצבה, למשל:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+y^2}{3x+4y-xy} = \frac{5}{9}$$

2) משפט הסנדוויץ', למשל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = 0$$

$0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \le \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = |y| \to 0$ לכן

3) הפרכת קיום הגבול ע"י בחינת מסלולים שונים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

מהו

ניקח מסלול $x=y$:

$$\lim_{x=y\to 0} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\neq$$

$x=2y$:

$$\lim_{x=2y\to 0} \frac{2y^2}{5y^2} = \frac{5}{2}$$

לכן מתבדר

4) הבאת הפונק' לכדי פונק' של משתנה אחד אותו או לפונק' שגבולה ידוע

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{x(y^2+z^2)} \cdot \frac{x(y^2+z^2)}{xy^2} = 1\cdot 5 = 5$$

הגדרה - גבולות חוזרים

תהי נתונה פונק' $u=f(x,y)$ המוגדרת בסביבה מנוקבת של (x_0,y_0)

לכל y קבוע נחשב $\varphi(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y)$

נעבור לגבול $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \varphi(y)$

נקרא גבול חוזר.

באותו אופן ניתן להגדיר גבול חוזר כאשר x קבוע.

תרגיל

חשב את הגבולות החוזרים והגבול הכפול של הפונק' $f(x,y) = y\cdot\sin\frac{1}{x-1}$

כאשר $(x,y)\to(1,0)$

פתרון

לא קיים $= \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1} y\cdot\sin\frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0} y\cdot\sin\frac{1}{x-1} = 0$$

גבול כפול:

$$0 \le \left|y\cdot\sin\frac{1}{x-1}\right| \le |y| \to 0$$

לכן הגבול הכפול יהיה $\lim_{(x,y)\to(1,0)} y\cdot\sin\frac{1}{x-1} = 0$

מסקנה

אם הגבול הכפול קיים הוא חייב להתלכד עם כל גבול חוזר שקיים.

תרגיל

חשב את הגבולות החוזרים והגבול הכפול של הפונק':

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\to(0,0)$$

פתרון

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}0=0$$

נחשב את הגבול הכפול: $0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\to0$

לכן הגבול הכפול שווה וקיים.

משפט

הקשר בין גבול כפול וגבולות חוזרים:

אם מתקיימים התנאים הבאים:

1) קיים $L=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

2) לכל y מסביבת y_0 קיים $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$

אזי $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ קיים ושווה ל-L (כנ"ל הפוך)

פונקציות וקבוצות

הגדרה

אומרים שעל קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ מוגדרת פונק' אם לכל $x\in M$ מתאים מספר ממשי יחיד לפי חוק הנתון מראש, ומסמנים $u=f(x)$.
הקבוצה M תקרא תחום ההגדרה של הפונק' ונסמן $f:M\to\mathbb{R}$.
אוסף כל ערכי הפונק' ייקרא טווח.

תרגיל

* מצא את תחום ההגדרה והטווח של $f(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$

נדרוש $1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2>0$ לכן ת"ה הוא כדור הפתוח שמרכזו 0 ורדיוס 1.

הטווח הוא $[1,\infty)$

* אותו דבר עבור $f(x,y,z)=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ת"ה: $-1\le\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 1$; $x,y\neq 0$

טווח: $[0,\pi]$

הגדרות

* הנק' $x_0\in\mathbb{R}^n$ תקרא נקודה פנימית של הקבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אם קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x_0,\varepsilon)\subseteq M$. x_0 תקרא נקודה חיצונית של M אם קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x_0,\varepsilon)\subseteq M^c$. נקודה גבולית היא $x_0\in M\subseteq\mathbb{R}^n$
* אם בכל סביבת-ε של x_0 יש נק' ששייכות ל-M ונק' שלא שייכות לה נקודה גבולית תקרא נקודת שפה
* הקבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ שכל נקודותיה הן פנימיות תקרא קבוצה פתוחה.

דוגמא: עבור הקבוצה $\{(x,y):y=x^2\}$ כל נק' שבה היא נק' שפה.
או עבור $\{(x,y):-2\le x\le 2,\ 1<y\le 2\}$ נק' שפה הן: $(x,2)\ -2<x\le 2$
$(2,y)\ 1<y\le 2$

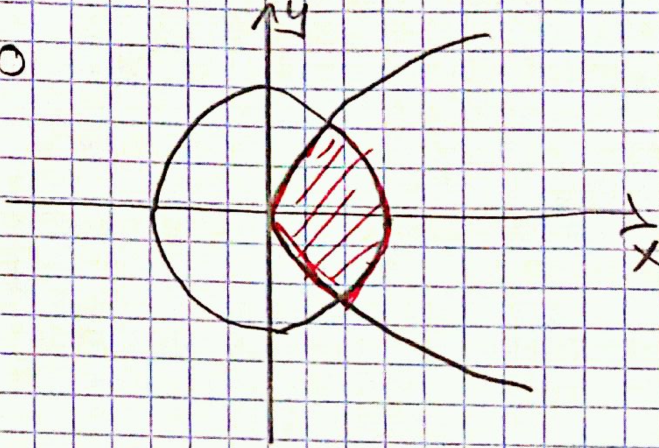
* הקבוצה M חסומה אם קיים כדור בעל רדיוס סופי המכיל אותה

תרגיל

צייר את הקבוצות הבאות וקבע לגבי כל אחת האם פתוחה/סגורה/לא פתוחה ולא סגורה/האם חסומה:

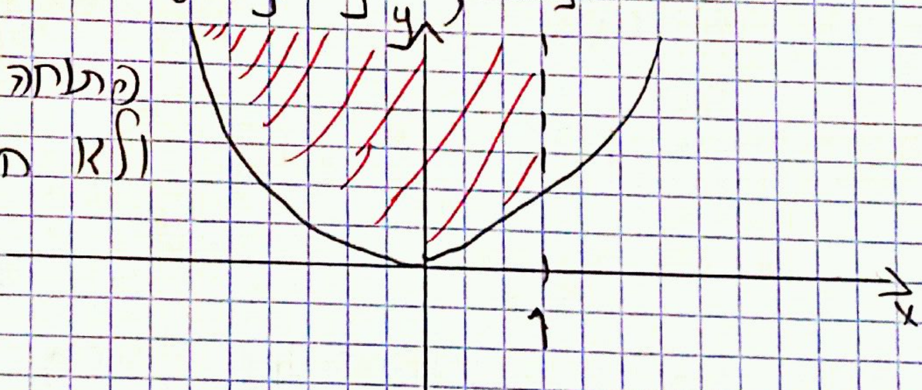
1) $\{(x,y): x^2+y^2 \le 4,\ x \ge y^2\}$

סגורה וחסומה



2) $\{(x,y): y > x^2,\ x < 1\}$

פתוחה ולא חסומה



רציפות

הגדרה

תהי $u=f(\vec{x})$ מוגדרת בתחום D נאמר שהיא רציפה בנק' $x^0\in D$ אם $\lim_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)$

הגדרה שקולה:

הפונק' $u=f(x)$ רציפה ב- $x^0\in D$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל ה-x-ים המקיימים $\|x-x^0\|<\delta$ מתקיים $\|f(x)-f(x^0)\|<\varepsilon$

דוגמה

בדוק רציפות בנק' $(0,0,0)$ של הפונק'

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & else\end{cases}$$

פתרון

נחשב $\lim_{(x,y,z)\to 0} f(x,y,z)$:

$$0\le\left|\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}\right|+\left|\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right|\le|x|+|y|+|z|\to 0$$

$\Downarrow$

הפונק' רציפה

תרגיל

האם ניתן להגדיר את הפונק' הבאה בנק' $(0,0)$ כך שתהיה רציפה בנק' זו: $f(x,y)=\frac{y^2}{y^2+x^4}$

פתרון

עבור המסלול $y=x$: $\lim_{y=x\to 0} f(x,y)=1$

כמו כן: $\lim_{y=x^2\to 0} f(x,y)=\frac{1}{2}$

ולכן אין גבול ב- $(0,0)$ ולכן בכל מקרה לא ניתן להגדיר הפונק' כרציפה

תרגיל בדוק את רציפות הפונק' בנק' $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & else\end{cases}$$

מסקנה

$\lim_{y=kx\to 0} f(x,y)=\frac{1}{1+k^2} \Rightarrow$ הגבול משתנה בהתאם לk ולכן לא קיים

תרגיל

האם ניתן להגדיר את הפונק' הבאה ב-$(0,0)$ כך שתהיה רציפה בנק' זו: $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$

וכאן נסמן $r=x^2+y^2\to 0$ אז $\lim_{r\to 0} f(x,y)=1$

ולכן אפשר להגדיר כרציפה

תרגיל

הוכח שאם $f(x,y)$ רציפה ב-D לפי x ו-y ביחד אז היא רציפה לפי x ולפי y.

הוכחה

$f(x,y)$ רציפה ב-D $\Leftarrow$ היא רציפה בכל נק' $(x_0,y_0)\in D$, כלומר מתקיים

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

כלומר שאם $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ אז $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$

כעת נבחר $\|x-x_0\|<\delta_1$ נרצה להוכיח $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$

עבור y קבוע $\Leftarrow$ נבחר $y=y_0$ ונקבל הנדרש.

כך f רציפה לפי x, באותו אופן רציפה לפי y.

<u>רציפות במידה שווה</u>

הגדרה

הפונק' $u=f(x)$ נקראת רציפה במ"ש בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ התלוי ב-ε בלבד כך שלכל שתי נק' x', x'' המקיימות $|x'-x''|<\delta$ מתקיים $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

תרגיל

הוכח: הפונק' $u=\arcsin\frac{x}{y}$ רציפה בתחום $D=\{(x,y):|x|\le|y|, y\neq 0\}$ אך לא רציפה שם במ"ש.

פתרון

בת"ר $\Leftarrow$ $\frac{x}{y}$ רציפה, arcsin רציפה $\Leftarrow$ $\arcsin\frac{x}{y}$ רציפה (לפי משפט

הרכבה של פונק' רציפות רציפה + אריתמטיקה)

נראה כי הפונק' אינה רציפה במ"ש:

נגדיר סדרה של נקודות $v_n=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$ $u_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$

$$\|u_n-v_n\| = \frac{2}{n}\longrightarrow 0$$

$$\|f(u_n)-f(v_n)\| = \sqrt{(\arcsin 1-\arcsin(-1))^2} = \pi \not\to 0$$

ולכן אין רציפות במ"ש.

תרגיל

הוכח: אם הפונק' $u=f(x,y)$ המוגדרת בתחום D רציפה לפי x ומקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y (כלומר $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le A|y_1-y_2|$ כאשר $(x,y_1),(x,y_2)\in D$). אזי $f(x,y)$ רציפה ב-D.

הוכחה

נוכיח ש- $f(x,y)$ רציפה בכל נק' $(x_0,y_0)\in D$, כלומר שלכל (x_0,y_0) המק"מ $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ מתקיים $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\|<\varepsilon$

ולכן $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\le$

$$\le A|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \quad (*)$$

נתון כי f רציפה לפי x כלומר לכל ε_1, δ_1 $|x-x_0|<\delta_1$ מתקיים (לכל y): $|f(x,y)-f(x_0,y)|\le\varepsilon_1$. ניקח $\varepsilon_1=\varepsilon/2$

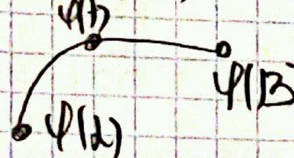
כעת ניקח $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{2A},\delta_1\right)$, $|y-y_0|$

ובהתאם ל-(*): $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\|\le A\cdot\frac{\varepsilon}{2A}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

קבוצות ופונקציות ב-$\mathbb{R}^n$

הגדרה

אוסף הנקודות $\{M\}$ בעלות קואורדינטות $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ שהן פונק' רציפות של הפרמטר $\alpha \le t \le \beta$: $x_i = \varphi_i(t)$ נקרא קו רציף ב-$\mathbb{R}^n$



דוגמאות

א. הקבוצה $\{(x,y): x=\cos t, y=\sin t, 0\le t\le 2\pi\}$ היא קו רציף ב-$\mathbb{R}^2$ שנקרא מעגל היחידה.

ב. הקב' $\{(x,y): x=t, y=f(t), a\le t\le b\}$ כאשר $f(t)$ היא פונק' רציפה ב-$[a,b]$, היא קו רציף.

הגדרה

נאמר ששתי נקודות $M_1(x_1', x_2', \dots, x_n')$ $M_2(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$ ניתנות לחיבור ע"י קו רציף, אם קיים קו רציף כך שמתקיים:

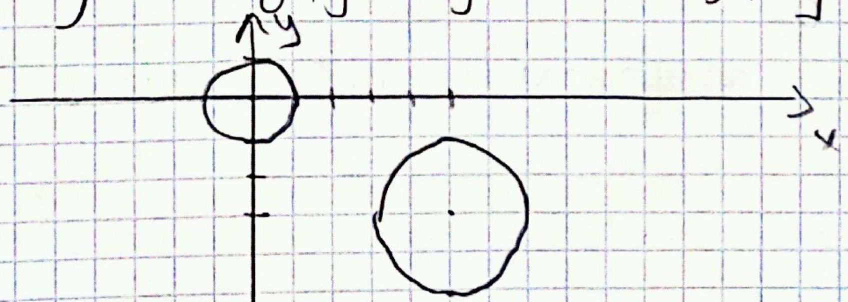
$x_1' = \varphi_1(\alpha)$, $x_2' = \varphi_2(\alpha)$, ..., $x_n' = \varphi_n(\alpha)$

$x_1'' = \varphi_1(\beta)$, $x_2'' = \varphi_2(\beta)$, ..., $x_n'' = \varphi_n(\beta)$

הקבוצה D תקרא קשירה אם ניתן לחבר כל שתי נקודות בה ע"י קו רציף שנמצא כולו בתוך הקבוצה.

דוגמה

הקבוצה $D := \{(x,y): x^2+y^2<1 \lor (x-5)^2+(y+3)^2<4\}$ אינה קשירה כי



הגדרה קב' קשירה נקראת תחום.

משפט ערך הביניים

תהי הפונק' $u=f(M)$ רציפה בתחום קשיר D. יהיו $A,B\in D$. לכל m הנמצא בין $f(A), f(B)$ קיימת $c\in D$ כך ש-$f(c)=m$.

תרגיל

מצא טווח של הפונק' $g(x,y,z)=\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}$

כאשר $x,y,z>0$ ו- $xyz=1$

פתרון

נקח מסלול $z=\frac{1}{x^2}$, $x=y$:

$$\lim_{x\to 0} g(x,x,\tfrac{1}{x^2})=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x^2+\frac{2}{x}}{2x+\frac{1}{x^2}}}_{f(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} f(x)=0\\[2em]\lim_{x\to \infty} f(x)=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\in(0,\infty)$$

קיבלנו טווח מקסימלי כי תמיד $g(x,y,z)>0$

ו- g תקבל כל נק' ב- $(0,\infty)$ מרציפות של הביניים.

$\Downarrow$

הטווח היא $(0,\infty)$.

משפט ויירשטראס

אם פונק' רציפה בתחום חסום וסגור D אז היא חסומה

הערה:

משפט ויירשטראס נותן לנו תנאי מספיק אך לא הכרחי.

דוגמה

א) $f(x,y)=\frac{1}{x+y}$ המוגדרת ב- $(0,1]\times(0,1]$. קב' זו חסומה ( )

אך אינה סגורה. כמו כן $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x+y}=\infty$

ב) $f(x,y)=c$ קבועה ב- $\mathbb{R}^2$ שאינה חסומה אבל רציפה $f(x,y)$

אינה חסומה,

נגזרות חלקיות

הגדרה

תהי $z=f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0). אם קיים הגבול

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

נאמר ש-f גזירה חלקית לפי x ב-(x_0,y_0), הגבול נקרא הנגזרת החלקית לפי x ב-(x_0,y_0) ונסמנו $f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

תרגיל

חשב את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=x^y$:

$f'_x(x,y)=yx^{y-1}$

$f'_y(x,y)=x^y\cdot\ln x$

תרגיל

תהי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & else\end{cases}$$

א. חשב את הנגזרות החלקיות בראשית

ב. חשב את הנגזרות החלקיות מחוץ לראשית

ג. האם הנגזרות החלקיות רציפות בראשית?

פתרון

א.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=0$$

ב. $(x,y)\neq\vec{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{4y^3(x^2+y^2)-2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4y^3x^2+2y^5-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

ג. עבור $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$: נראה שלא קיים גבול ב-$\vec{0}$:

נקח מסלול $y=2x$: הגבול הוא

$$\lim_{x\to 0}\frac{28x^4-4x^5}{25x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{28-4x}{25}=\frac{28}{25}$$

לכן לא רציפה (כי אם קיים גבול הוא יהיה 1) $\frac{28}{25}\neq 1$

עבור $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$: נקח המסלול $x=y$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^5-2x^4}{4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-2}{4}=-\frac{1}{2}\neq 0$$

ולכן לא רציפה.

תרגיל

חשב את הנגזרות החלקיות של $u=xe^{yz}+\ln(xyz)$

פתרון

$$u'_x=e^{yz}+\frac{1}{xyz}\cdot yz=e^{yz}+\frac{1}{x}$$

$$u'_y=xze^{yz}+\frac{1}{y}$$

$$u'_z=xye^{yz}+\frac{1}{z}$$

דיפרנציאביליות

הגדרה

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $a\in\mathbb{R}^n$. נאמר ש-f דיפרנציאבילית ב-a אם:
f מוגדרת בסביבת a, ו- $f(a+h)=f(a)+L(h)+\varepsilon(h)\cdot\|h\|$
כאשר $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית, ו- $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ($\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$)

במקרה זה נאמר ש-f היא $o(h)=o(\|h\|)=\varepsilon(h)\cdot\|h\|$

משפט

f דיפרנציאבילית $\Rightarrow$ כל הנגזרות החלקיות קיימות ואז:

$$L(h)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

דוגמה

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שהיא דיפרנציאבילית תיראה כך:

$$f(a+h)=f(a)+\underbrace{f'_{x_1}(a)h_1+\dots+f'_{x_n}(a)\cdot h_n}_{L(h)}+\varepsilon(h)\cdot\|h\|$$

משפט

אם קיימות כל הנגזרות החלקיות ב-a והן רציפות אז f דיפרנציאבילית ב-a.

דוגמה

עבור $f(x,y,z)=(x+y,yz)$; מט' היעקוביאן היא $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&z&y\end{pmatrix}$

לכן הדיפרנציאל ב-(a_1,a_2,a_3) יהיה:

$$L(h)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&a_3&a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1+h_2\\a_3h_2+a_2h_3\end{pmatrix}$$

לכן

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)=f(a_1,a_2,a_3)+L(h)+o(\|h\|)=$$

$$=(a_1+a_2,a_2a_3)+(h_1+h_2,a_3h_2+a_2h_3)+o(\|h\|)$$

$$L(h):=df_a(h)$$

תרגיל

בדוק דיפרנציאביליות של $f(x,y)$ בנק' $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

פתרון

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f'_x(x,y)=\frac{y\cos x\cdot(x^2+y^2)-2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(x,y)=\frac{y\cos x}{x^2+y^2}-\frac{2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$0\le\left|\frac{y\cos x}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{y}{y^2}\right|\to0$$

לא רציף

$\Downarrow$

לא דיפרנציאבילי

דרך נוספת:

$$f(0+h,0+k)=f(h,k)=f(0,0)+\varepsilon(h,k)\|(h,k)\|$$

$$\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}=\frac{k\sin h}{h^2+k^2}$$

$$\lim_{\substack{(h,k)\to0\\h=k}}\varepsilon(h,k)=\lim_{h\to0}\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}h}=\infty$$

ולכן לא דיפרנציאבילי

דיפרנציאביליות ונגזרות

הגדרה

נאמר ש- $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב- $a\in\mathbb{R}^n$ אם:

1) f מוגדרת בסביבת a

2) $f(a+h)=f(a)+L(h)+\varepsilon(h)\|h\|$

באשר $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ הינ', $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש- $\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$

תרגיל

בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & else\end{cases}$$

פתרון

נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונק' ב-$\vec{0}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1/h}{e^{1/h^2}}\underset{t=\frac{1}{h}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0$$

באותו אופן $f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\ldots=0$

בנוסף $L(h,k)=(0,0)\binom{h}{k}=0$

לכן אם f דיפרנציאבילית אמור להתקיים

$$f(h,k)=\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

לכן

$$\varepsilon(h,k)=\frac{e^{-1/(h^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to\vec{0}}\varepsilon(h,k)=\lim_{(h,k)\to\vec{0}}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

$\Rightarrow f$ אכן דיפרנציאבילית

תרגיל

בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & else\end{cases}$$

דיפרנציאביליות ונגזרות

תזכורת

נאמר ש-$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-$a\in\mathbb{R}^n$ אם:

1) f מוגדרת בסביבת a

2) $f(a+h)=f(a)+L(h)+\varepsilon(h)\|h\|$

באשר $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ה"ל, $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש- $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

תרגיל

בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq\vec{0} \\ 0 & else\end{cases}$$

פתרון

נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונק' ב-$\vec{0}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}=\frac{1/h}{e^{1/h^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim\frac{1}{2te^{t^2}}=0 \qquad t=\frac{1}{h}$$

באותו אופן $f'_y(0,0)=\lim_{h\to0}\ldots=0$

לכן $L(h,k)=(0,0)\binom{h}{k}=0$

לכן אם f דיפרנציאבילית אמור להתקיים

$$f(h,k)=\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

לכן

$$\varepsilon(h,k)=\frac{e^{-1/(h^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to\vec{0}}\varepsilon(h,k)=\lim_{(h,k)\to\vec{0}}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

$\Rightarrow f$ אכן דיפרנציאבילית

תרגיל

בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & else\end{cases}$$

פתרון

נבדוק את הנגזרות החלקיות ב-$(0,0)$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=0 \Rightarrow L(h,k)=0$$

אם מתקיימת דיפרנציאביליות אמור להתקיים

$$\frac{hk}{h^2+k^2}=\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

לכן $\varepsilon(h,k)=\frac{hk}{(h^2+k^2)^{1.5}}$. נראה ש- $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)$ אינו קיים.

ניקח מסלול $k=h$:

$$\lim_{h=k\to 0}\varepsilon(h,h)=\infty$$

לכן אין דיפרנציאביליות.

נגזרת מכוונת

הגדרה

יהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $u,a\in\mathbb{R}^n$, $\|u\|=1$. אזי

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$$

זו הנגזרת המכוונת של f בכיוון u בנק' a.

תרגיל

מצא את הנגזרת המכוונת של הפונק' f בנק' a לפי הכיוון l. $l=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ $a=(-1,1)$ $f(x,y)=x\sin(x+y)$

פתרון

$$\|l\|=\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$u=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ מנורמל}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left((1,-1)+t\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-f(1,-1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\sqrt{2}t)}{t\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)=\sqrt{2}$$

משפט

אם f דיפרנציאבילית ב-a אזי לכל $\|u\|=1$ מתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a)=df_a(u)=L(u)$$

$\partial u = 2(-1)+1-\dots$

תרגיל

הראו כי $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & else\end{cases}$ אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$

פתרון

ראשית, מתקיים ש $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$

אם f הייתה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$ אז לפי המשפט

הנ"ל לכל וקטור יחידה $u=(\cos\theta,\sin\theta)$ מקיים את הדיפרנציאל

$$df_{(0,0)}(u)=(f_x\ \ f_y)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=0$$

מצד שני

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}=\dots=\lim_{t\to0}\cos^2\theta\sin\theta\neq0$$

ט) בסתירה למשפט. לכן f אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

הגדרה

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, נגדיר $\nabla f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ע"י

$$\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

הוא וקטור הנגזרות החלקיות של הפונק', ונקרא הגרדיאנט של f ב-a.

משפט

י) אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב-a אז: $df_a(h)=(\nabla f(a))\cdot h$

מסקנה

אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב-a אז לכל וקטור יחידה $u\in\mathbb{R}^n$: $\frac{\partial f}{\partial u}(a)=df_a(u)=(\nabla f(a))\cdot u$

דוגמה

נחזור לדוגמה הראשונה $f(x,y)=y\sin(x+y)$. קודם חישבנו

$u=\left(\frac{-\sqrt2}{2},\frac{-\sqrt2}{2}\right)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial u}(1,-1)=-\sqrt2$

$$(\nabla f(1,-1))\cdot\left(\frac{-\sqrt2}{2},\frac{-\sqrt2}{2}\right)=-\sqrt2=\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1)$$

כנדרש!

תרגיל

הוכח שהנגזרת המכוונת של $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

בנק' $u(x,y,z)$ כאשר הכיוון לראשית שווה ל- $-\frac{2u}{r}$

כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

הוכחה

$$l=(0,0,0)-(x,y,z)=(-x,-y,-z)$$

$$\hat{l}=\frac{l}{\|l\|}=-\frac{(x,y,z)}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x,y,z)=\lim_{t\to 0}\frac{u((x,y,z)+t\cdot\hat{l})-u(x,y,z)}{t}=\ldots=\lim_{t\to 0}\frac{t}{r}\ldots u-2\cdot\frac{u}{r}=-\frac{2u}{r}$$

משפט - כלל השרשרת

תהי הפונק' $u=f(x,y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות f'_x,f'_y,f'_z רציפות. ותהיינה $x(t),y(t),z(t)$ גזירות, אזי קיימת הנגזרת לפונק' $\frac{du}{dt}$ ומתקיים $\frac{du}{dt}=f'_x\cdot\frac{dx}{dt}+f'_y\cdot\frac{dy}{dt}+f'_z\cdot\frac{dz}{dt}$

תרגיל

חשב לפונק' $\frac{du}{dt}$ $u=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $x=2t$, $y=t$.

פתרון

לפי כלל השרשרת:

$$\frac{du}{dt}=\frac{2xy(x^2+y^2)-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2+\frac{x^2(x^2+y^2)-2y^2x^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot 1=\frac{4}{5}$$

תרגיל

תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור.

$f'_x(-3,6)=2$ $\quad f'_y(-3,6)=1$

אם נקח $x=u^2-v^2$ $\quad y=u^2vw$

נגדיר $\varphi(u,v,w)=f(u^2-v^2,u^2vw)$

חשבו $\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ בנק' $(1,2,3)$

פתרון

מכלל השרשרת

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=2\cdot 2u+1\cdot 2u\cdot v\cdot w=16$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=2(-4)+1\cdot3=-5$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}=2\cdot0+1\cdot2=2$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla\psi(1,2,3)=(16,-5,2)$$

תרגיל

הוכח שהפונקציה $z=\varphi(x^2-y^2)$ כאשר $\varphi(t)$ גזירה מקיימת את המשוואה $y\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+x\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$

פתרון

$\varphi(t)$ גזירה $\Rightarrow$ φ דיפרנציאבילית + גזירה

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'_t\cdot 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'_t\cdot(-2y)$$

ולכן מתקיימת המשוואה הנדרשת!

נגזרות חלקיות מסדר גבוה

הגדרה

תהי $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ נגזרת חלקית לפי x_i של הפונקציה $u=f(x_1,\dots,x_n)$ המוגדרת בתחום D. אם u'_{x_i} גם היא מוגדרת בכל נק' של D, אזי היא פונק' של n משתנים. לכן ניתן להגדיר (אם הן קיימות) את הנגזרת שלה לפי x_j ולקבל נגזרת חלקית מסדר שני של u. והסימון יהיה: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}=f^{(2)}_{x_i,x_j}=f^{(2)}_{ij}$

אם $i\neq j$ אזי הנגזרת $f^{(2)}_{ij}$ נקראת נגזרת מעורבת מסדר שני.

דוגמה

מצא את הנגזרות החלקיות מסדר שני של $u=\ln(x^2+y^2)$

$$u'_x=\frac{2x}{x^2+y^2} \qquad u'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$u''_{xx}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad u''_{yy}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u''_{xy}=u''_{yx}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

תרגיל

יהי $u=x^2y^3z^4$, חשב $u^{(3)}_{x^3}, u^{(4)}_{x^2yz}, u^{(4)}_{xyzx}$

פתרון

$u'_x=2xy^3z^4$

$u''_{xx}=2y^3z^4$

$u^{(3)}_{x^3}=0$

$u^{(3)}_{x^2y}=6y^2z^4$

$u^{(3)}_{x^2yz}=24y^2z^3$

$u''_{xy}=6xy^2z^4$

$u'''_{xyz}=24xy^2z^3$

$u''''_{xyzx}=24y^2z^3$

משפט

אם הפונק' $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D וקיימות נגזרות חלקיות f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} ורציפות בסביבת הנקודה $M\in D$, אז בנק' M:

$$f_{xy}(M)=f_{yx}(M)$$

נגזרות ודיפרנציאביליות

תרגיל

נתונה הפונק' $u=\frac{1}{r}$ כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. חשב את הלפלסיאן $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

פתרון

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\underbrace{-\frac{1}{r^3}}_{\frac{\partial}{\partial x}}+\underbrace{\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{x}{r}}_{\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}\Rightarrow \Delta u=0$$

תרגיל

רשום את הלפלסיאן $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ בקואורדינטות קוטביות

$x=\rho\cos\varphi \qquad y=\rho\sin\varphi$

פתרון

נהפוך את φ,ρ למשתנים של x,y:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

$$\rho'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\varphi\qquad \rho'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\varphi$$

$$\varphi'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\varphi_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\rho''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(\cos\varphi)=\underbrace{\frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}}+\frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\sin\varphi\cdot\varphi'_x=\frac{\sin^2\varphi}{\rho}$$

$$\rho''_{yy}=\frac{\partial(\sin\varphi)}{\partial y}=0+\cos\varphi\cdot\varphi'_y=\frac{\cos^2\varphi}{\rho}$$

$$\varphi_{xx}=0\qquad \varphi_{yy}=0\qquad \varphi_{xy}=\varphi_{yx}=\frac{-\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\rho^2}$$

$$\rho_{xy}=\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\rho}=\rho_{yx}$$

נשתמש בהחלפת משתנים:

החלפת משתנים

נתונה הפונק' $z=f(x,y)$. נעבור למשתנים הבאים

$$s=s(x,y) \quad t=t(x,y)$$

אז:

$$\begin{cases} z_x = z_s \cdot s_x + z_t \cdot t_x \\ z_y = z_s \cdot s_y + z_t \cdot t_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{xx} = z_{ss} \cdot s_x^2 + z_{tt} \cdot t_x^2 + 2 z_{st} s_x t_x + z_s s_{xx} + z_t t_{xx} \\ z_{yy} = z_{ss} \cdot s_y^2 + z_{tt} \cdot t_y^2 + 2 z_{st} \cdot s_y \cdot t_y + z_s \cdot s_{yy} + z_t \cdot t_{yy} \end{cases}$$

ואז מציבים את התרגיל.

דיפרנציאל מסדר גבוה

הגדרה

תהי $u=f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר n בסביבת הנק' M.

הדיפרנציאל הוא:

$$du = f_x dx + f_y dy$$

נגדיר דיפרנציאל מסדר שני:

$$d^2u = d[f_x dx + f_y dy] = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2$$

כעת נגדיר אופרטור $d\cdot$:

$$d\cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy$$

עבור חזקה של $d\cdot$ כבינום של פולינום. (מהבינום של ניוטון)

ואז הדיפרנציאל מסדר n:

$$d^n u = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy\right)^n$$

דוגמה

חשב את הדיפרנציאל השלישי של הפונק' בנק' $(1,1)$

$$u = x^2 \ln y$$

$u_x = 2x\ln y \quad u_y = \frac{x^2}{y} \quad u_{xx} = 2\ln y \quad u_{yy} = -\frac{x^2}{y^2} \quad u_{xy} = \frac{2x}{y}$

$u_{xxx} = 0 \quad u_{yyy} = \frac{2x^2}{y^3} \quad u_{xxy} = \frac{2}{y} \quad u_{xyy} = -\frac{2x}{y^2}$

$d^3u = u_{xxx}+3u_{xxy}+3u_{xyy}+u_{yyy} = \frac{6}{y} - \frac{6x}{y^2} + \frac{2x^2}{y^3}$

$d^3u(1,1) = 6-6+2 = \underline{2}$

הערה

במקרה של פונק' n-ית משתנים, הדיפרנציאל ה-n-י

הוא $d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n u$

תרגיל

מצא d^2u לפונק' $u=xyz$

$u_{xx}=u_{yy}=u_{zz}=0$ $\quad u_{xy}=z \quad u_{xz}=y \quad u_{yz}=x$

$d^2u = zdxdy+ydxdz+xdydz$

נוסחת טיילור

תהי $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u=f(x_1,\dots,x_n)$ פונק' השייכת ל-C^{n+1} בסביבת הנק' $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ ותהי

$\Delta u = f(M) - f(M_0)$ התוספת של הפונק' u בנק' M_0.

אזי קיימת נק' N על הקטע המחבר את הנק' M ו-M_0 כך שמתקיים:

$\Delta u = du(M_0) + \frac{1}{2!}d^2u(M_0)+\dots+\frac{1}{n!}d^nu(M_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u(N)$

כאשר $dx_i = x_i - x_i^0$ $(i=1,\dots,n)$ שווים בכל אחד מהדיפרנציאלים של u.

דוגמה

מצא 3 איברים ראשונים בנוסחת טיילור, של הפונק':

$f(x,y)=x^3+y^3+2x^2-4y^2+x-1$

בסביבת הנק' $(1,2)$

פתרון

$f_x = 3x^2+4x+1 \qquad f_y=3y^2-8y \qquad f_{xy}=0$

$f_{xx}=6x+4 \qquad f_{yy}=6y-8 \qquad f_{xxy}=0$

$f_{xxx}=6 \qquad f_{yyy}=6 \qquad f_{xyy}=0$

$$\Delta f = -5 + \frac{1}{2}\left((6\cdot 1+4)(x-1)^2 + (6\cdot 2-8)\cdot(y-2)^2\right) + 1\cdot\left((3\cdot 1^2+4\cdot 1-1)(x-1) + (3\cdot 2^2 - 8\cdot 2)(y-2)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(6(x-1)^3 + 6(y-2)^3\right)$$

החלפת משתנים

תהי $f(x,y)$ גזירה לפי שני משתניה, נחליף: $f(z(x,y),t(x,y))$ אזי מתקיים:

$$\begin{cases} f'_x = f'_z \cdot z'_x + f'_t \cdot t'_x \\ f'_y = f'_z \cdot z'_y + f'_t \cdot t'_y \end{cases}$$

$$f''_{xx} = f''_{zz} \cdot (z'_x)^2 + f''_{zt} \cdot t'_x \cdot z'_x + f'_z \cdot z''_{xx} + (f''_{tz} z'_x + f''_{tt} \cdot t'_x) \cdot t'_x + f'_t \cdot t''_{xx} =$$
$$= f''_{zz}(z'_x)^2 + f''_{tt} \cdot (t'_x)^2 + 2 f''_{zt} z'_x t'_x + f'_z z''_{xx} + f'_t t''_{xx}$$

ובאותו אופן עבור f''_{yy}

תרגיל 1

תהי $u(x,y)$. כאשר $x=\rho\cos\varphi ; y=\rho\sin\varphi$, חשב $u''_{xx}+u''_{yy}$

ומכאן $\rho^2=x^2+y^2 \quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}$

$2\rho\rho'_x=2x \Rightarrow \rho'_x=\frac{2x}{2\rho}=\frac{x}{\rho}=\cos\varphi \qquad \rho'_y=\sin\varphi$

$\varphi'_x=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{\rho} \qquad \varphi'_y=\frac{\cos\varphi}{\rho}$

$\varphi''_{xx}=-\frac{\cos\varphi\cdot\varphi'_x\rho-\rho'_x\cdot\sin\varphi}{\rho^2}=\dots=\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}$

$\varphi''_{yy}=-\frac{2\sin 2\varphi}{\rho^2}$

$\varphi''_{xy}=-\frac{\cos\varphi\cdot\varphi'_y-\rho'_y\cdot\sin\varphi}{\rho^2}=\frac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\rho^2}$

$\rho''_{xx}=\frac{\sin^2\varphi}{\rho} \qquad \rho''_{yy}=\frac{\cos^2\varphi}{\rho} \qquad \rho''_{xy}=-\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\rho}$

וככה מקבלים את התרגיל

דוגמה 2

ידוע ש:

$$df=f'_x dx+f'_y dy$$
$$d^2f=f''_{xx}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}dy^2$$
$$d^nf=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^n$$

ומכאן תהי $u=x^2\ln y$, חשב $d^3u(1,1)=?$

$u'_x=2x\ln y \quad u'_y=\frac{x^2}{y} \quad u''_{xx}=2\ln y \quad u''_{xy}=\frac{2x}{y} \quad u''_{yy}=-\frac{x^2}{y^2}$

$u'''_{xxx}=0 \quad u'''_{xxy}=\frac{2}{y} \quad u'''_{xyy}=-\frac{2x}{y^2} \quad u'''_{yyy}=\frac{2x^2}{y^3}$

ובנק' $(1,1)$: $u'_x=0 \quad u'_y=1 \quad u''_{xx}=0 \quad u''_{xy}=2 \quad u''_{yy}=-1 \quad u'''_{xxx}=0 \quad u'''_{xxy}=2$

$u'''_{xyy}=-2 \quad u'''_{yyy}=2$

$$\Delta^3 u = u'''_{xxx}dx^3 + 3u'''_{xxy}dx\,dy^2 + u'''_{yyy}dy^3 + 3u'''_{xyy}dx\,dy^2 =$$
$$= 6dx^2dy - 6dx\,dy^2 + 2dy^3$$

דוגמא 3

תהי $f(s(x,y),t(x,y))$ כך ש-

$s(x,y) = a_1x + b_1y$

$t(x,y) = a_2x + b_2y$

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial s}ds + \frac{\partial}{\partial t}dt\right)^n f$$

$d^2f = f''_{ss}ds^2 + 2f''_{st}ds\,dt + f''_{tt}dt^2 + f'_s d^2s + f'_t d^2t$

$ds = s'_x dx + s'_y dy = a_1dx + b_1dy$

$d^2s = d(a_1dx + b_1dy) = 0$

$df = f'_x dx + f'_y dy$

$d^2f = \ldots = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{yy}dy^2$

כעת אם $s(x,y) = x+y$ $t(x,y) = x-y$

$d^2f = f''_{ss}ds^2 + 2f''_{12}ds\,dt + f''_{12}dt^2 = \ldots = f''_{ss}(dx+dy)^2 + 2f''_{st}(dx+dy)(dx-dy)$
$+ f''_{tt}(dx-dy)^2$

טורי טיילור

דוגמה 1

מצא טור טיילור $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\left(\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)}=\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}-o(y^2)\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{4}+o(x^2)-o(y^2)$$

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2\dots$$

22

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

דוגמה 2

עבור $f(x,y)=e^{x+y}$:

$$f(x,y)=f(1,1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1,1)=$$

$$=f(1,1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\,(x-1)^m(y-1)^{n-m}}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}\cdot m!(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n f(1,1)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=$$

$$\underset{n=m+k}{=}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\,k!}\cdot\frac{\partial^{m+k}f(1,1)}{\partial x^m\partial y^k}=e^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\,k!}$$

$$\frac{\partial^{m+k}f}{\partial x^m\partial y^k}=e^{x+y}$$

דוגמה 3

תהי $f(x,y)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$; $\alpha\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; $x\to 0^+$: $\forall n\in\mathbb{N}: f(x,x^{\alpha})=o(x^n)$

הוכח שלכל $n\in\mathbb{N}$: $f(x,y)=o(|x|^n+|y|^n)$

הוכחה

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{m!\,x^k y^{m-k}}{k!\,(m-k)!\,\partial x^k\partial y^m}\cdots f(0,0)+o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n+1}\right)$$

נניח $n>k+\alpha L$, n , $\frac{\partial^{k+L}f}{\partial x^k\partial y^L}f(0,0)=0$: ($k,L\in\mathbb{N}\cup\{0\}$)

יש (1) $f(x,y)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{k_1!k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\cdot\frac{x^{k_1}y^{k_2}}{k_1!k_2!}+o(|x|^n+|y|^n)$

ובכן, $f(x,x^{\alpha})=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{k_1!k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}(0,0)x^{k_1}y^{k_2}+o(|x|^n+|y|^{\alpha n})$

$$f(x,x^{\alpha})=o(x^n)\Rightarrow f(x,x^{\alpha})=o(x^{k+\alpha L})$$

ולכן $\sum_{\substack{0\le k_i\le n\\ k_1=k,\ k_2=L}}\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}=0\Rightarrow\frac{\partial^{k+L}f}{\partial x^k\partial y^L}(0,0)=0\Rightarrow_{(1)}f=o(|x|^n+|y|^n)$

טורי טיילור

דוגמה 1

מצא טור טיילור $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\left(\frac{y^2}{2}-o(y^2)\right)}\underset{\Downarrow}{=}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}-o(y^2)\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{4}+o(x^2)-o(y^2)$$

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\dots$$

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

דוגמה 2

עבור $f(x,y)=e^{x+y}$:

$$f(x,y)=f(1,1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1,1)=$$

$$=f(1,1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\,(x-1)^m(y-1)^{n-m}}{m!\,(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n f(1,1)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=$$

$$\underset{n-m=k}{=}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\,k!}\cdot\frac{\partial^{m+k}f(1,1)}{\partial x^m\partial y^k}\underset{\Downarrow}{=}e^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\,k!}$$

$$\frac{\partial^{m+k}f}{\partial x^m\partial y^k}=e^{x+y}$$

דוגמה 3

תהי $f(x,y)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$; $\alpha\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; $x\to 0^+$: $f(x,x^\alpha)=o(x^n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

הוכח שלכל $n\in\mathbb{N}$: $f(x,y)=o(|x|^n+|y|^n)$

הוכחה

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{k}\frac{m!\,x^k y^{m-k}}{k!\,(m-k)!\,\partial x^k\partial y^{m-k}}f(0,0)+o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n+1}\right)$$

נניח $n>k+\alpha l$, αn, אז: $\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}f(0,0)=0$ $\quad(k,l\in\mathbb{N}\cup\{0\})$

אם (1) $\quad f(x,y)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{k_1!\,k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\cdot\frac{x^{k_1}y^{k_2}}{k_1!\,k_2!}+o(|x|^n+|y|^n)$

ובכן, $\quad f(x,x^\alpha)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{k_1!\,k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}(0,0)x^{k_1}y^{k_2}+o(|x|^n+|y|^{\alpha n})$

$$f(x,x^\alpha)=o(x^n)\Rightarrow f(x,x^\alpha)=o(x^{k+\alpha l})$$

ולכן $\quad\sum_{\substack{0\le k_i\le n\\ k_1=k,\ k_2=l}}\frac{1}{k_1!\,k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}=0\Rightarrow\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)=0\overset{(1)}{\Rightarrow} f=o(|x|^n+|y|^n)$

אקסטרמום

דוגמה 4

מצא אקסטרמום מקומי של $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

$$\begin{cases} f'_x=3x^2-3y=0 \\ f'_y=3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\quad(1,1)$$

בנק' $(0,0)$ מט' הנגזרות החלקיות מסדר שני היא

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |det|=-9$$

$\Downarrow$

אין אקסטרמום.

בנק' $(1,1)$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=27$$

$\Downarrow$

$(1,1)$ אקסטרמום, וגם $f_{xx}>0$ לכן מינימום.

דוגמה 5

מצא אקסטרמום $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

$$f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Rightarrow x=0$$

$$f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Rightarrow y=0$$

ומההגדרה הפונק' $(0,0)$ מקסימום.

דוגמה 6

$f(x,y)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $\quad x,y,z>0$

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \\ f'_z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},1,1\right)$$

והדט' של המט' יהיה $|\Delta_1|=4$ $|\Delta_2|=8$ $|\Delta_3|=32$

$\Downarrow$

מינימום לוקלי

פונקציות סתומות

נתונה $F(x,y)$ פונק' המוגדרת בתחום D. אם המשתנים x,y קשורים ע"י משוואה פונקציונלית $F(x,y)=0$ ולכל x מקטע מסוים קיים לפחות y אחד כך שהזוג (x,y) מקיים $F(x,y)=0$ אזי המשוואה זו מגדירה פונק' $y=f(x)$ כך ש- $F(x,f(x))\equiv 0$.

הגדרה

הפונק' $y=f(x)$ נקראת פונק' סתומה אם היא ניתנת כפתרון של $F(x,y)=0$.

דוגמה

נתונה משוואה $x^2+y^2=R^2$ מצא את הפונק' הסתומה $y=f(x)$ ב- $[-R,R]$ המקיימת אותה.

פתרון

חצי מעגל עליון $y_1=\sqrt{R^2-x^2}$

חצי מעגל תחתון $y_1=-\sqrt{R^2-x^2}$

פונק' סתומה לא רציפה:

$$y_3=\begin{cases}\sqrt{R^2-x^2} & -\frac{R}{2}\le x\le \frac{R}{2}\\ -\sqrt{R^2-x^2} & -R\le x<-\frac{R}{2};\ \frac{R}{2}<x\le R\end{cases}$$

משפט הפונק' הסתומה

תהי $F(x,y)$ מוגדרת במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$ ותהי $M_0(x_0,y_0)$ נק' פנימית של המלבן R. אם:

1) $F(x_0,y_0)=0$

2) $F\in C^1$ בסביבת M_0

3) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

אזי קיימת סביבה של הנק' M_0 שבה מוגדרת פונק' $y=f(x)$ כך ש- $F(x,f(x))\equiv 0$ בעלת התכונות:

א) $y_0=f(x_0)$

ב) f רציפה ב-x

ג) f גזירה ב-x ומתקיים $f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$

נראה שהמשפט מתקיים בדוגמה הקודמת $F(x,y)=x^2+y^2-R^2$

סביב $(0,R)$:

ראשית, התנאים מתקיימים.

נקח $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, אזי הנק' אם שליה ⊕

רציפות $\lim_{x\to0} f(x)=R$ ⊕ גזירות

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{R-\sqrt{R^2-(R+h)^2}}{h}=\frac{h}{\sqrt{R^2-h^2}}=0$$

לופיטל

תרגיל

נתונה המשוואה $3x^2y-yz^2-4xz=7$

בסביבת הנק' $M_0(-1,1,2)$

א. בדוק שהמשוואה הנ"ל מגדירה פונק' סתומה $y=\varphi(x,z)$ בסביבת

ב. הוכח ש-φ די פרנציאבילית ב-$(-1,2)$

ג. האם המשוואה הנתונה מגדירה פונק' סתומה $z=f(x,y)$

בסביבת M_0.

פתרון

א. $F(x,y,z)=3x^2y-yz^2-4xz-7 \Leftarrow y=\frac{4xz+7}{3x^2-z^2}$

נבדוק את תנאי המשפט:

(1) $F(-1,1,2)=0$

(2) $F\in C^1$

(3) $F'_y(-1,1,2)=1\neq0$

לכן קיבלנו את הדרוש.

ב. $\varphi'_z=\frac{2yz+4x}{3x^2-z^2}$ $\varphi'_x=-\frac{6xy-4z}{3x^2-z^2}$ רציפות ולכן דיפ'.

ג. נתייחס ל-F כמשוואה ריבועית ביחס ל-z. שורשיה:

$$z_{1,2}=\ldots=\frac{-2x\pm\sqrt{4x^2-7y+3x^2y^2}}{y}$$

$\Delta(1,1)=0$ ובסביבתה שלילית אי אפשר.

דוגמה

המט' $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 14 \end{pmatrix}$ מייצגת את $\phi = 6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 - 8y_1y_3$

הגדרה

תבנית ריבועית תקרא חיובית (או שלילית) אם לכל הערכים האפשריים של המשתנים $y_1, \dots, y_n$ שאינם מתאפסים הפונ' ϕ מקבלת ערכים חיוביים (או שליליים) בלבד.

אם ϕ מקבלת ערכים חיוביים ושליליים ביחד היא נקראת מעורבת.

אם ϕ מקבלת ערכים אי שליליים (או אי חיוביים) אומרים שהיא אינה שלילית (אי חיובית).

דוגמאות

א. $\phi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ חיובית

ב. $\phi = -(y_1 - y_2)^2$ אי חיובית

משפט סילבסטר

התבנית הריבועית $\phi(y_1, \dots, y_n)$ חיובית אם"ם כל המינורים הראשיים A_i של המט' A המייצגת אותה חיוביים.

ϕ שלילית אם"ם הסימנים של המינורים הראשיים מתחלפים לסירוגין כאשר A_1 שלילי.

דוגמה

התבנית מהדוגמה הקודמת חיובית.

נקודות קיצון

הגדרה

לפונק' $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ יש מקס' (או מינ') מקומי בנק' M_0 אם קיימת סביבה של M_0 כך שלכל M מהסביבה הנ"ל מתקיים $f(M)\le f(M_0)$ (או בהתאמה $f(M)\ge f(M_0)$).

אם נסמן $\Delta u=f(M)-f(M_0)$, ואם לכל M מתקיים:

א. $\Delta u\le 0$, אז ב-M_0 יש לפונק' u מקסימום מקומי.

ב. $\Delta u\ge 0$, אז ב-M_0 יש לפונק' u מינימום מקומי.

תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום

אם לפונק' u יש אקסטרמום בנק' M_0 ובנוסף היא בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון בנק' זו אזי כל הנגזרות הללו שוות לאפס.

הגדרה

נאמר ש-M_0 היא נקודה קריטית אם עשוי להיות בה אקסטרמום מקומי (או שהנגזרות החלקיות מתאפסות או שאינן קיימות).

תרגיל

מצא את כל הנק' הקריטיות של $f(x,y)=|x|+x^2y^2$

פתרון

$$f'_x=\begin{cases}1+2xy^2 & x>0\\ -1+2xy^2 & x<0\\ \text{לא קיים} & x=0\end{cases}\qquad f'_y=2x^2y$$

$$\Downarrow$$

נק' מהצורה $(0,y)$

הגדרה

פונק' של n משתנים מהצורה $\Phi(y_1,\dots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j$ נקראת תבנית ריבועית של $y_1,\dots,y_n$ והמטר' הסימטרית $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ מייצגת אותה.

פונקציות סתומות ואקסטרמום

תרגיל

א. הוכיחו כי המערכת
$$\begin{cases} xe^{u+v}+2uv=1 \\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x \end{cases}$$
מגדירה פונק' דיפרנציאבילית $u(x,y)$ $v(x,y)$ בסביבת $(1,2)$ וגם $u(1,2)=v(1,2)=0$

ב. מצאו את $\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)$

פתרון

תהי $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י
$$F(x,y,u,v)=(\underbrace{xe^{u+v}+2uv-1}_{F_1},\ \underbrace{ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}-2x}_{F_2})$$

א. נראה שמתקיימים תנאי משפט הפונק' הסתומה:

- $F(1,2,0,0)=(0,0)$ ✓(1)

$F_x=(e^{u+v},-2)$ $F_y=(0,e^{u-v})$ $F_u=(xe^{u+v}+2v,\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v})$ ✓(2)

$F_v=(xe^{u+v}+2u,\ -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2})$

$F\in C^1$ ⇐ בסביבת $(1,2,0,0)$ כל הנגזרות החלקיות רציפות

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}F'_{1u} & F'_{1v}\\ F'_{2u} & F'_{2v}\end{vmatrix}=\dots$$ ✓(3)

- בנק' $(1,2,0,0)$ נקבל את הדטרמיננטה
$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3\neq0$$

$\Downarrow$

ממשפט הפונק' הסתומה נקבל את הנדרש.

ב. נשתמש בכלל קרמר:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)=\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}}(1,2,0,0)=\frac{0}{-3}=\underline{\underline{0}}$$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}=0$$

אקסטרמום עם אילוצים

דוגמה

מצא את האקסטרמום של הפונק' $z=x^2+y^2$ עם האילוץ $x+y=1$

פתרון

$y=1-x \Rightarrow$

$$z=2x^2-2x+1$$

$$z'=4x-2=0 \qquad x=\frac{1}{2} \qquad y=\frac{1}{2}$$

$$z''=4>0$$

ולכן הנק' הקריטית $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ היא נק' קריטית של הפונק' תחת האילוץ.

תרגיל

מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונק':
$z=x^2+y^2+2x-2y$ על חצי המעגל העליון
$C=\{(x,y): x^2+y^2=1,\ y\geq 0\}$

פתרון

האילוץ הוא $y=\sqrt{1-x^2}$; $-1\leq x\leq 1$

נציב את הפונק' על האילוץ:

$$z=1+2x-2\sqrt{1-x^2}$$

$$z'=2+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

$$2\sqrt{1-x^2}+2x=0$$

$$2\sqrt{1-x^2}=-2x \Rightarrow 1-x^2=x^2$$

$$x=-\sqrt{0.5}$$

אקסטרמום: $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

ונסתכל גם על נקודות הקצה $(1,0)$ $(-1,0)$

$$z(-\tfrac{1}{\sqrt{2}})=1-2\sqrt{2} \qquad z(1)=3 \qquad z(-1)=-1$$

$$\Downarrow$$

לכן 3 הערך הגדול ביותר ו- $1-2\sqrt{2}$ הקטן ביותר

כופלי לגרנג'

דרך נוספת למציאת אקסטרמום עם אילוצים היא שיטת כופלי לגרנג'

תרגיל

מצאו את נק' הקיצון של הפונק' $u(x,y)=xy$ תחת האילוץ $x+y-1=0$

פתרון

נבנה פונק' לגרנג'

$$L=\underbrace{u(x,y)}_{\text{הפונק'}}+\underbrace{\lambda}_{\text{כופלי לגרנג'}}\cdot\underbrace{(x+y-1)}_{\text{האילוץ}}=xy+\lambda(x+y-1)$$

נפתור מערכת

$L_x=0$

$L_y=0$

$L_\lambda=0$

ונקבל את הנק' $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

נמצא את המרחב המשיק

$$d^2L=L_{xx}dx^2+L_{yy}dy^2+2L_{xy}dxdy=2dxdy$$

כמו כן

$$g(x,y)=x+y-1=0$$
$$dg=g_xdx+g_ydy=0$$
$$dx=-dy$$

לכן $d^2L<0$ ולכן יש מקס' מתנאי

תרגיל

מצאו נק' קיצון מותנה לפונק'

$f(x,y)=1-4x-8y$

תחת האילוץ $x^2-8y^2=8$

פתרון

פונק' לגרנג' היא

$$L=1-4x-8y+\lambda(x^2-8y^2-8)$$

$L_x=-4+2\lambda x=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{x}$

$\Rightarrow x=-4y$

$L_y=-8-16\lambda y=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2y}$

$L_\lambda=x^2-8y^2-8=0 \Rightarrow y=\pm 1$

$(-4,1)$ $\lambda_1=-\frac{1}{2}$

$(4,-1)$ $\lambda_2=\frac{1}{2}$

$L_{xx}=2\lambda$ $\quad L_{yy}=-16\lambda$ $\quad L_{xy}=0$

$d^2L=2\lambda dx^2-16\lambda dy^2$

עבור $\lambda=-\frac{1}{2}$:

$d^2L(-4,1,-\frac{1}{2})=-dx^2+8dy^2$

נגזור:

$g(x,y)=x^2-8y^2-8=0$

$2xdx-16ydy=0$

$dx=-2dy$

$d^2L(-4,1,-\frac{1}{2})=-(-2dy)^2+8dy^2=4dy^2>0$

ולכן $(-4,1)$ מינ׳ בתנאי

עבור $\lambda=\frac{1}{2}$

$d^2L=dx^2-8dy^2$

כמו כן

$dx=-2dy$

$d^2L=-4dy^2<0$

ולכן $(-4,1)$ מקס׳ בתנאי

שאלה ממבחן (תשפא מועד א)

בשימוש בשיטת לגרנג׳ וקיצון עם אילוצים מצא את המרחק מהנק׳ $a=(1,2,1)$ למישור $x+y+2z=1$

מהי הנק׳ על מישור זה שהכי קרובה ל-a?

פתרון

פונק׳ המרחק בריבוע $f=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$

אנו מעוניינים ש-(x,y,z) תהיה על המישור לכן האילוץ

$g(x,y)=x+y+2z-1=0$

$L=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+\lambda(x+y+2z-1)$

$L_x=2(x-1)+\lambda=0$

$L_y=2(y-2)+\lambda=0$

$L_z=2(z-1)+2\lambda=0$

$L_\lambda=x+y+2z-1=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, $z=-\frac{1}{3}$, $\lambda=\frac{4}{3}$

לאחר הצבה:

$d^2L=2(dx^2+dy^2+dz^2)>0$

ולכן מינימום בתנאי

טורי טיילור

פיתוח טיילור $f(x)=f(a)+df(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2!}d^2f(a)\cdot(x-a)^2+\dots$

עבור פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב הנק׳ a עד סדר n

השארית היא $o(\sqrt{(x-a)^n})$ (שארית פיאנו)

תרגיל ממבחן (השאלה מועד א)

כתבו נוסחת טיילור לפונק׳ $f(x,y)=\frac{1}{2-xy^2}$ מסביב ל$(0,0)$ עד סדר 30 עם שארית פיאנו.

פתרון

$$\frac{1}{2-xy^2}=\frac{1}{2(1-\frac{xy^2}{2})}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{xy^2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^ny^{2n}}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{10}\frac{x^ny^{2n}}{2^{n+1}}+\sum_{n=11}^{\infty}\frac{x^ny^{2n}}{2^{n+1}}$$

[illegible] יהיה 30

צריך שזו שארית פיאנו כלומר שמתקיים $o(\sqrt{x^2+y^2}^{30})$

צ״ל בעצם ש

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^{30}}=0$$

כאשר

$$g(x,y)=\sum_{n=11}^{\infty}\frac{x^ny^{2n}}{2^{n+1}}$$

נעבור לקואורדינטות קטביות:

צ״ל:

$$\lim_{r\to 0}\frac{\sum_{n=11}^{\infty}\frac{r^n\cos^n\theta\cdot r^{2n}\sin^{2n}\theta}{2^{n+1}}}{r^{30}}=0$$

עבור $r<1$:

$$0\le\left|\text{מה שבפנים}\right|\le\sum_{n=11}^{\infty}\left|\frac{r^{3n-30}}{2^{n+1}}\right|\le\sum_{n=11}^{\infty}\frac{|r|}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|r|}{2^n}=\frac{|r|}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=|r|\to 0$$

ולכן הגבול שווה לאפס כנדרש