הכללה של מושג הדיפרנציאביליות לפונקציות וקטוריות

$$f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^l$$

מוגדרת בסביבה של נק. $x^0\in\mathbb{R}^k$ f נקראת דיפרנציאבילית בנק. x^0 אם קיימת העתקה לינארית $L:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^l$ כך ש

$$\left\|\left[f\left(x^0+h\right)-f\left(x^0\right)\right]-Lh\right\|=o\left(\|h\|\right)$$

עבור $\|h\|<r$. כלומר

$$(*)\qquad \frac{f\left(x^0+h\right)-\overbrace{f\left(x\right)-Lh}^{the\,error}}{\|h\|}\xrightarrow[h\to0]{}0$$

$$\Updownarrow$$

$$(**)\,\forall_{j=1,\dots l}\frac{f_j\left(x^0+h\right)-f_j\left(x^0\right)-\left(Lh\right)_j}{\|h\|}\xrightarrow[h\to0]{}0$$

לכל j, $L_j:=h^{\in\mathbb{R}^k}\to\left(Lh\right)_h\in\mathbb{R}$ היא פונקציונאל לינארי. כלומר $(*)$ שקול לכך שקיימים פונקציונאלים לינאריים L_j($j=1,\dots l$) כך ש$(**)$ מתקיים(עם הקשר $L_jh\doteqdot\left(Lh\right)_j$) וזה שקול לפי ההגדרה הקודמת $l=1$ לכך שכל הרכיבים f_j של f הם דיפרנציאבילים בנקודה x^0, ובמקרה זה הדיפרנציאל הוא הפונקציונאל הלינארי כלומר:

$$df_j|_{x^0}h=L_jh=\left(Lh\right)_j\,(***)$$

ידוע כי

$$f\left(u\right)\to v$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_i f\left(u\right)_i\to v_i$$

כיוון שdf_j נקבע באופן יחיד ע"י $(**)$, הרי L נקבע באופן יחיד ע"י $(*)$ ונקרא הדיפרנציאל של הפונקציה הוקטורית f בנק. x^0 ומסומן $df|_{x^0}$(או $df\left(x^0\right)$). הנוסחא $(***)$ נראית עתה כך:

$$\forall_{j=1,\dots l}\left[df|_{x^0}h\right]_j=df_j|_{x^0}h=h\cdot\nabla f_j|_{x^0}$$

לדוגמה

ניקח $\left(\arctan\frac{y}{x},\log\left(x^2+y^2\right)\right)\to f\left(x,y\right)$($f:\mathbb{R}^2\backslash\left(0\times\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}^2$ כי $x\neq0$). דיפר-נציאבלית כי הרכיבים גזירים עם נגזרת רציפה בכל התחום $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x\neq0\right\}$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=\left(\frac{d\left(f_1,f_2\right)}{d\left(x,y\right)}\right)=\begin{pmatrix}\frac{df_1}{dx}&\frac{df_2}{dx}\\\frac{df_1}{dy}&\frac{df_2}{dy}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\dfrac{-y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} & \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y & 2x \\ x & 2y \end{pmatrix}$$

$$df|_{x^0}\, h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y & 2x \\ x & 2y \end{pmatrix} \frac{1}{x^2+y^2} = \left(\frac{-yh_1 + xh_2}{x^2+y^2}, \frac{2xh_1+2yh_2}{x^2+y^2} \right)$$

נגזרות מסדר גבוה

תהי f פונ' ממשית המוגדרת על קבוצה $D \subset \mathbb{R}^k$ שעבורה כל הנגזרות החלקיות $\dfrac{df}{dx_i}$ $\forall_{i=1,\dots k}$ קיימות בD, אזי $\dfrac{df}{dx_i}$ הן k פונקציות ממשיות המוגדרות בD. אם נגזרותיהן החלקיות קיימות שם, $\dfrac{d}{dx_j}\left(\dfrac{df}{dx_i}\right)$ נקראות נגזרות מעורבות מסדר שני בD, וכך ניתן להמשיך אינדוקטיבית ולהגדיר נגזרות מעורבות מסדר כלשהו n

$$\left(\frac{d}{dx_{i_1}}\right)\left(\frac{d}{dx_{i_2}}\right)\dots\left(\frac{d}{dx_{i_n}}\right) f \doteqdot \frac{d^n}{dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_n}} f$$

יש תנאים שמותר להתעלם מסדר הגזירות.

מינוח

- נגזרת מסדר 0 היא הפונקציה עצמה.
- פונ' f נקראת ממחלקה C^n(עם $n \in \mathbb{N}$) אם כל נגזרותיה המעורבות עד לסדר n קיימות ורציפות בקבוצה D.

תנאי מספיק לאפשרות של חילוף סדר הגזירה

משפט

תהי f פונ' ממשית ומגדרת בסביבה D של נק' x^0 ב$\mathbb{R}^k$ ונניח:

(א) f ממחלקה C^1 בD

(ב) עבור זוג אינדקסים מסויים (i,j)($i \neq j$), $\dfrac{d^2 f}{dx_j dx_i}$ קיימת בD ורציפה בנ-קודה x^0

אזי: $\left.\frac{d^2f}{dx_idx_j}\right|_{x^0}$ קיימת ומתלכדת עם $\left.\frac{d^2f}{dx_jdx_i}\right|_{x^0}$

על כן, אם f ממחלקה C^2 אזי $\frac{d^2f}{dx_jdx_i}=\frac{d^2f}{dx_idx_j}$ בD.

הוכחה

כיוון שהמשפט דן רק בגזירות לפי 2 משתנים x_i,x_j עבור i,j קבועים, מספיק להוכיח את המשפט עבור פונ' f של שני משתנים, ונקרא לנוחיות הסימום x וy.

נתון (א) f ממחלקה C^1 בסביבה ממשית של נקודה $\left(x^0,y^0\right)$

(ב) f_{xy} קיימת בסביבה ורציפה בנק' $\left(x^0,y^0\right)$

צ"ל: $\left.f_{yx}\right|_{(x^0,y^0)}$ קיימת ו$f_{yx}\left(x^0,y^0\right)=f_{xy}\left(x^0,y^0\right)$.