תרגיל בית 4 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. תזכורת: בהינתן $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות, הגדרנו על המכפלה הקרטזית $G\times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\bullet h_2)$$

לכל $g_1,g_2\in G,h_1,h_2\in H$. קבוצה זו עם פעולה זו נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו-H. ודאו שאתם יודעים להוכיח שזו אכן חבורה.
הוכיחו או הפריכו:

א. החבורה $G\times H$ אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.

ב. אם G',H' תתי־חבורות של G,H בהתאמה, אז $G'\times H'$ תת־חבורה של $G\times H$.

ג. אם K תת־חבורה של $G\times H$, אז היא מהצורה $G'\times H'$ עבור G',H' תתי־חבורות של G,H בהתאמה.

שאלה 2. הוכיחו שלחבורה מסדר זוגי יש מספר אי-זוגי של איברים מסדר 2 (בפרט קיים איבר כזה).
הערה: קיום איבר מסדר 2 הוא גם תנאי מספיק להיותה של החבורה מסדר זוגי (למה?).

שאלה 3. תהי G חבורה. נגדיר $f:G\to G$ לפי $f(g)=g^2$.

א. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

ב. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

שאלה 4. הוכיחו שאם G חבורה סופית ו- $K\le H\le G$, אז: $[G:K]=[G:H]\cdot[H:K]$ ("כפליות האינדקס").

שאלה 5. מצאו את האינדקסים הבאים.

א. $[\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_8:\langle(2,2)\rangle]$

ב. $[\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:\langle(2,2)\rangle]$

ג. $[2\mathbb{Z}\times S_3:6\mathbb{Z}\times\langle\mathrm{id}\rangle]$

שאלה 6. הוכיחו שאם $H\le G$ היא מאינדקס 2 אז $a^2\in H$ לכל $a\in G$.

תרגיל 7. תהי G חבורה מסדר 8.

א. הוכיחו שאם G ציקלית, אז יש לה תת־חבורה מסדר 4 (למה ברור כי תת־החבורה כאן היא ציקלית?).

ב. הוכיחו שאם G לא אבלית, אז יש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4 (כאן הציקליות של תת־החבורה לא ברורה מיידית).

ג. מצאו דוגמה נגדית לסעיף הקודם אם G אבלית.

ד. (רשות) נכליל למקרה שבו G היא חבורה לא אבלית מסדר 2^t עבור $t > 2$. הוכיחו שיש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.

בהצלחה!