

# בוחר באנליזה מודרנית

מועד א'

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס.  
מתרגלים: הראל רוזנפלד, עידו שפרינגר  
יש לענות על כל השאלות. לרשותכם שעה וחצי.

## שאלה 1 (40 נק')

תהי  $X$  קבוצה, ו- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$  אוסף תת-קבוצות שלה. נסמן ב- $\mathcal{S}$  את קבוצת כל הקבוצות  $F$  ב- $\sigma(\mathbb{A})$ , עבורן קיימת משפחה בת-מניה  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$  כך ש- $F \in \sigma(\mathbb{B})$ .

1. הוכיחו כי  $\mathcal{S}$  היא  $\sigma$ -אלגברה.
2. הוכיחו כי  $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{S}$ .
3. הסיקו כי  $\mathcal{S} = \sigma(\mathbb{A})$ , כלומר לכל  $F \in \sigma(\mathbb{A})$  קיימת משפחה בת-מניה כנ"ל.

## שאלה 2 (25 נק')

הוכיחו או הפריכו: אם  $|f|$  מדידה לבג אז  $f$  מדידה לבג.

## שאלה 3 (40 נק')

יהי  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  מרחב מידה כך ש- $\mu(X) < \infty$ , ותהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית אי-שלילית. הראו שמתקיים:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$$

בהצלחה!