פתרון תרגיל בית 5 בחשבון אינפיניטסימלי 2
89-133 סמסטר ב' תשע"ה

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"א סיוון ה'תשע"ה, 8.6.2015.

שאלה 1. השתמשו במבחן דיריכלה כדי להוכיח שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס לכל $\alpha > 0$.

פתרון. נסמן $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ואת $g(x) = \sin x$. עבור $\alpha > 0$ ברור כי f רציפה בקטע, הנגזרת f' רציפה ו-f שואפת לאפס. כמו כן הפונקציה g רציפה והאינטגרל $\int_1^\infty g(x)dx$ חסום, שכן לכל $b \geq 1$ מתקיים

$$\left|\int_1^b \sin x dx\right| = \left|[\cos t]_1^b\right| = |\cos b - \cos 1| \leq 2$$

ולכן לפי משפט דיריכלה $\int_1^\infty f(x)g(x)dx = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס.

שאלה 2. הוכיחו או הפריכו: אם $f(x)$ פונקציה רציפה והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ מתכנס, אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

פתרון. נפריך על ידי דוגמה נגדית. נגדיר פונקציה ממשית $f(x)$ להיות $f(n) = 1$ בכל נקודה טבעית $x = n \in \mathbb{N}$ וסביב כל נקודה כזאת נבנה משולש שבסיסו ברוחב 2^{-n} בגובה 1. נקבל

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \cdot 2^{-1} < \infty$$

שהוא סכום המשולשים. אבל $\lim_{x\to\infty} f(x)$ לא קיים.

שאלה 3. הוכיחו כי האינטגרל $\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{x}dx$ מתכנס בתנאי. רמז: אפשר להשתמש בהצבה כדי לעבור לאינטגרל לא אמיתי אחר, שהוא יותר מוכר.

פתרון. נסמן את האינטגרל ב-I ותחילה נוכיח התכנסות. על ידי הצבה נקבל אינטגרל לא אמיתי מהסוג הראשון

$$I = \left[t = \frac{1}{x}, dt = -\frac{dx}{x^2}\right] = \int_\infty^1 t\cos(t)\frac{-1}{t^2}dt = \int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t}dt$$

באופן דומה לשאלה הראשונה, אפשר להשתמש במשפט דיריכלה כדי להוכיח את התכנסות האינטגרל.

כעת נותר לבדוק התכנסות בהחלט. ברור כי $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$, ואם רוצים להוכיח התבדרות אפשר להשתמש במבחן ההשוואה עם פונקציה קטנה יותר. למשל $\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|$, ונקבל

$$\frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \leq \left|\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|$$

ונרצה להראות כי $\int_0^1 \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$ מתבדר (אפשר בכמה דרכים). כדי להראות התבדרות נשתמש במבחן הגבול כשנשווה עם $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

ידוע כי $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ מתבדר, לכן $\int_0^1 \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$ מתבדר, ולכן I מתבדר.

שאלה 4. חשבו את האינטגרלים הבאים.

א. (רמז: פצלו לשני תחומים לפי הנקודה הבעייתית)

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

ב. (רמז: אינטגרציה בחלקים) עבור $a>0$ ו-b קבועים

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)dx$$

פתרון. א. נפצל את האינטגרל לפי הרמז בנקודה $x=2$ לשני אינטגרלים לא אמיתיים מהסוג השני, שאותם אנו יודעים לפתור

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \lim_{b\to 4^-}\int_2^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \lim_{b\to 4^+}\int_b^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

ונמשיך

$$\lim_{b\to 4^-} -3\left(4-x\right)^{\frac{1}{3}}\Big|_2^b + \lim_{b\to 4^+} -3\left(4-x\right)^{\frac{1}{3}}\Big|_b^6$$
$$= \lim_{b\to 4^-}\left(-3\left(4-b\right)^{\frac{1}{3}} + 3\sqrt[3]{2}\right) + \lim_{b\to 4^+}\left(3\sqrt[3]{2} + 3\left(4-b\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 6\sqrt[3]{2}$$

ב. בדומה לשאלה בתרגול, יש לבצע אינטגרציה בחלקים פעמיים. נסמן את האינטגרל

ב-I ונקבל

$$\begin{aligned}
I &= \left[u = e^{-ax}, v' = \sin(bx), u' = -ae^{-ax}, v = -\frac{\cos(bx)}{b}\right] \\
&= -\frac{e^{-ax}\cos(bx)}{b} - \int_0^\infty \frac{ae^{-ax}\cos(bx)}{b}dx = \left[f = ae^{-ax}, g' = \frac{\cos(bx)}{b}\right] \\
&= -\frac{e^{-ax}\cos(bx)}{b} - \left(-\frac{ae^{-ax}\sin(bx)}{b^2} - \int_0^\infty \frac{-a^2e^{-ax}\sin(bx)}{b^2}dx\right) \\
&= \frac{e^{-ax}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I
\end{aligned}$$

וקיבלנו כי

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}e^{-ax}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right) + c$$

נחשב לפי הגדרה של אינטגרל לא אמיתי:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-ax}\sin(bx)dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{a^2+b^2}e^{-at}\left(a\sin(bt) - b\cos(bt)\right) - \frac{1}{a^2+b^2}e^{-a0}\left(a\sin(b0) - b\cos(b0)\right)
\end{aligned}$$

נתון כי $a>0$ ולכן $\lim_{t\to\infty} e^{-at} = 0$, אז נקבל כי $I = \frac{b}{a^2+b^2}$.

שאלה 5. קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים.

א. (רמז: משפט ההשוואה)

$$\int_1^\infty \frac{e^{\sin(x)}}{x}dx$$

ב. (רמז: חיבוריות האינטגרל ומשפט ההשוואה)

$$\int_1^\infty x^{-x}dx$$

ג. (רמז: משפט ההשוואה)

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x}dx$$

ד. (רמז: משפט המנה)

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\arctan(x)}{\sqrt{-x^3-x}}dx$$

ה.

$$\int_1^\infty \frac{x-\arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}dx$$

פתרון. שימו לב כי בתרגילים תתכן יותר מדרך פתרון "נכונה" אחת.

א. $\int_1^\infty \frac{e^{\sin(x)}}{x}dx$ מתבדר כי $\frac{e^{-1}}{x} \le \frac{e^{\sin(x)}}{x}$ וידוע כי $\int_1^\infty \frac{dx}{e\cdot x}$ מתבדר.

ב. את $\int_1^\infty x^{-x}dx$ נציג כסכום של שני אינטגרלים

$$\int_1^\infty x^{-x}dx = I_1 + I_2 = \int_1^2 x^{-x}dx + \int_2^\infty x^{-x}dx$$

האינטגרל I_1 מתכנס כי מדובר בפונקציה רציפה בקטע $[1,2]$. עבור האינטגרל I_2 נשים לב כי $x^{-x} \le x^{-2}$ עבור $x \ge 2$. לכן מספיק לבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$, שידוע שהוא מתכנס. סכום של אינטגרלים מתכנסים הוא מתכנס.

ג. נוכיח התבדרות בעזרת העובדה ש-$\arctan(x)$ היא פונקציה עולה. מתקיים $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \le \arctan(x)$ עבור $x \ge 1$. לכן $\frac{\arctan(x)}{x} \le \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{x}$. האינטגרל $\frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר, ולכן לפי מבחן ההשוואה גם האינטגרל בשאלה מתבדר.

ד. הפונקציות $\arctan(x)$, x, x^3 הן אי זוגיות. אפשר להחליף את x עם $-x$ ולחשב את התכנסות האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x^3+x}}dx$$

בעזרת מבחן המנה עם $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ אפשר לבדוק את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3}\arctan(x)}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{\pi}{2}$$

ומפני שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ מתכנס, גם האינטגרל בשאלה מתכנס.

ה. נפצל את האינטגרל בשאלה לשני אינטגרלים

$$I_1 + I_2 = \int_1^\infty \frac{x}{x(1+x^2)\arctan(x)}dx - \int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x(1+x^2)\arctan(x)}dx$$

את I_1 אפשר לבדוק אחרי הצבה $t = \arctan(x)$ ולקבל

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}dt$$

שהוא בודאי אינטגרל מתכנס.
האינטגרל I_2 מתכנס לאחר השוואה עם $\frac{1}{x^3}$ שהאינטגרל שלה מתכנס, ובסך הכל האינטגרל המקורי מתכנס.

שאלה 6. חשבו לאילו ערכי $\alpha \in \mathbb{R}$ האינטגרלים הבאים מתכנסים.

א. (רמז: מבחן ההשוואה)

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}dx$$

ב. (רמז: פצלו לפחות לשני תחומים לפי α, ואז להשתמש במבחן ההשוואה)

$$\int_0^1 |\ln(x)|^\alpha\, dx$$

פתרון. א. נבצע את מבחן ההשוואה עם $\frac{1}{x^{\alpha-2}}$ ונקבל

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2(x)}{x^2}=1$$

ואנו יודעים כי האינטגרל $\int_0^1\frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha<3$, ולכן גם האינטגרל בשאלה מתכנס בדיוק בתחום זה.

ב. עבור $\alpha>0$ נבצע את מבחן ההשוואה עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ונקבל

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\,|\ln(x)|^\alpha=0$$

ידוע לנו כי $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס, ולכן גם האינטגרל בשאלה מתכנס. עבור $\alpha=0$, ברור כי האינטגרל מתכנס. עבור $\alpha<0$, נקבל אינטגרל לא אמיתי מסוג שני עם נקודה בעייתית $x=1$. נבצע השוואה עם $\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}$ ונקבל

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\,|\ln(x)|^\alpha}{|\ln(x)|^\alpha}=\lim_{x\to1^-}x=1$$

כדי לבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_0^1\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}dx$ נשים לב כי במקרה שלנו $|\ln(x)|=-\ln(x)$ וניתן להציב

$$\int_0^1\frac{(-\ln(x))^\alpha}{x}dx=\left[t=-\ln x,dt=\frac{-1}{x}dx\right]=-\int_\infty^0 t^\alpha dt=\int_0^\infty t^\alpha dt$$

ולקבל שהאינטגרל האחרון מתכנס כאשר $\alpha>-1$, וזו תהיה התשובה גם עבור האינטגרל בשאלה.

בהצלחה!