

אוניברסיטת בר-אילן
 מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
 מס': 88-211-07+05
 מרצה: פרופ' מיכאל מגרל
 תאריך: 17.10.04 מועד ב'
 חומר עזר: רק מחשבון
 משך המבחן: שעתיים

השאלות:

5 מתוך 7

1. ענה "נכון" או "לא נכון":
 - א. נניח A, B תת חבורות של חבורה אבלית G . אזי תת קבוצה AB היא תת חבורה של G .
 - ב. חבורת Euler U_{18} היא ציקלית.
 - ג. קיים איזומורפיזם $Q \cong Q_+$.
 - ד. מספר האפימורפיזמים $Z \rightarrow \Omega_4 \times \Omega_5$ גדול ממספר האוטומורפיזמים $C_{20} \rightarrow C_{20}$.
 - ה. בחבורת אוטומורפיזמים של Z_{2004} יש יותר מ 500 אלמנטים.
 - ו. יש פחות מ 40 חבורות אבליות עד כדי איזומורפיזמים בעלות 18000 אלמנטים.
 - ז. לכל חבורה אבלית סופית G קיים m טבעי ואפימורפיזם $Z^m \rightarrow G$.
2. מעל קבוצה $R \times R^*$ נגדיר פעולה $(a_1, b_1) \bullet (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 a_2, b_1 b_2)$.

הוכח:

 - א. $(R \times R^*, \bullet)$ חבורה והיא לא אבלית.
 - ב. החבורה היא פתירה.
3. א. הוכח משפט Lagrange.
 ב. באמצעות משפט Euler מצא 2 ספרות אחרונות של המספר 1959^{1999} .
4. א. הוכח משפט האיזומורפיזם הראשון.
 ב. תאר תמונות אפימורפיות של החבורות $S_3, \langle \text{cis } \frac{17}{20} \pi \rangle$.
5. הוכח או הפרך:
 - א. לחבורה סימטרית S_n יש קבוצת יוצרים בעלת 2 איברים.
 - ב. לכל חבורה G עם 2004 איברים קיימת חבורה סופית X עם קבוצת יוצרים בעלת 2 איברים כך ש G איזומורפית לתת חבורה מסוימת של X .
 - ג. קיימת תת חבורה מסדר 34 בחבורה S_{15} .
6. א. בעזרת משפט Burnside מצא מספר ריבועים לא שקולים עד כדי סיבובים ושיקופים אם מותר לצבוע את הקודקודים ב 2 צבעים קבועים.
 ב. חבורה G בעלת 13 אלמנטים פועלת מעל קבוצה עם 13 אלמנטים.
 הוכח או הפרך: קיימת נקודת שבת.
7. א. הוכח שאם G חבורה בעלת 143 איברים אז G חבורה ציקלית.
 ב. הוכח שאם G חבורה בעלת 99 או 56 איברים אז G חבורה לא פשוטה.

בהצלחה !