אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 2

1. הוכיחו:
   a. כל תחום שלמות סופי הוא שדה.
   b. אם החבורה החיבורית של חוג עם יחידה היא ציקלית אז החוג קומוטטיבי.
   c. הוכיחו כי אם הגודל של חבורה זו ראשוני אז החוג הוא שדה.
2. הוכח או הפרך:
   a. אם I אידיאל אזי הקבוצה $\{1-a : a \in I\}$ סגורה לכפל.
   b. איחוד של אידיאלים הוא אידיאל.
   c. יהיו $R \subseteq S$ חוגים ויהי $I \lhd R$, אזי $I \lhd S$.
3. נביט בחוג $R = \{a + bx : a, b \in \mathbb{Z}_7\}$, כאשר החיבור הוא חיבור של מקדמים והכפל הוא הסטנדרטי על אברי $\mathbb{Z}_7$ וגם $x^2 = c$ לאיזשהו $c \in \mathbb{Z}_7$. קבעו האם החוג הוא שדה במקרים הבאים:
   a. $c = 2$.
   b. $c = 3$.
4. קבעו האם קיים הומומורפיזם $\varphi : R \to S$ (לאו דוקא יוניטרי) $\varphi \not\equiv 0$, כאשר:
   a. $R = \mathbb{Z}_n$ ו $S = \mathbb{Z}_m$ כאשר $m \mid n$.
   b. $R = \mathbb{Z}_n$ ו $S = \mathbb{Z}_m$ כאשר $n \mid m$ וגם $0 < m \neq n$.
5. נביט בחוג הפולינומים $R[x]$ מעל תחום שלמות R. האם I אידיאל כאשר
   a. $I = \{ f \in R[x] : f(137) = 0\}$
   b. $I = \{ f \in R[x] : f(1) = 10\}$
   c. $I = \{ f \in R[x] : f(0) = 0\}$
6. א. אם R חוג קומוטטיבי, ו S_1, S_2 תתי-חוגים של R אזי S_1S_2 הוא תת-חוג של R.
   ב. תנו דוגמא לחוג R עם שני תתי-חוגים S_1, S_2 כך ש S_1S_2 אינו תת-חוג.