אלגברה מופשטת 3 – תרגול 2

משפט: אם $F \subset K$ שדות, אזי K מ"ו מעל F.

טענה: יהי $p(x) \in F[x]$ פולינום מדרגה $n \geq 1$, הראו ש $V = F[x]/\langle p(x) \rangle$ הוא מרחב וקטורי ממימד n מעל F.

הוכחה: נטען ש $B = \{1, \overline{x}, ..., \overline{x}^{n-1}\}$ הוא בסיס של V. נראה שהאיברים ב B בת"ל. נניח שמתקיים $a_n \overline{x}^{n-1} + ... + a_1 \overline{x} + a_0 \overline{1} = 0$, כך שלא כל המקדמים הם 0. אם כך מתקיים $f(x) = a_n x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \equiv 0 \ (\text{mod } p(x))$, וזה יכול לקרות רק אם $p(x) \mid f(x)$. זאת סתירה, בגלל ש $\deg f(x) < \deg p(x) = n$. כעת נראה ש V נפרש ע"י B. יהי $\overline{f} \in V$ ויהי $f \in F[x]$ נציג שלו. נבצע חלוקה עם שארית ב $p(x)$: $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ כאשר $\deg r(x) < \deg p(x)$. כלומר $r(x) = b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$. כעת $\overline{f} = \overline{r} = b_{n-1} \overline{x}^{n-1} + ... + b_1 \overline{x} + b_0 \overline{1}$. לכן $\overline{f} \in Span(B)$.

משפט: לפולינום $p(x) \in F[x]$ יש לכל היותר $n = \deg p(x)$ שורשים.

תרגיל: יהי F שדה. הראו שאם G ת"ח סופית של F^* אזי היא בהכרח ציקלית.

הוכחה: לפי המשפט היסודי לחבורות אבליות (סופיות) לכל חבורה אבלית סופית קיים פירוק $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}}$. נסמן $m = lcm(p_1^{k_1}, ..., p_t^{k_t}) = \exp(G)$. אזי $\forall x \in G, x^m = 1$. לפולינום $f(x) = x^m - 1$ יש לכל היותר m שורשים ב F, ולכן $|G| \leq m$. מצד שני ברור ש $|G| \geq m$ ולכן $|G| = m$. אם כך בהכרח $p_i \neq p_j$ לכל $i \neq j$, אחרת $m = lcm(p_1^{k_1}, ..., p_t^{k_t}) < p_1^{k_1} \cdots p_t^{k_t} = |G|$. לכן G מכפלה ישרה של חבורות ציקליות מסדרים זרים, ולכן ציקלית בעצמה.

משפט: $\deg(f) = [K:F]$ כאשר $K = F(a)$ וגם $f(a) = 0$ עבור פולינום אי-פריק f.

<u>**מספרים ניתנים לבניה:**</u>

החוקים:

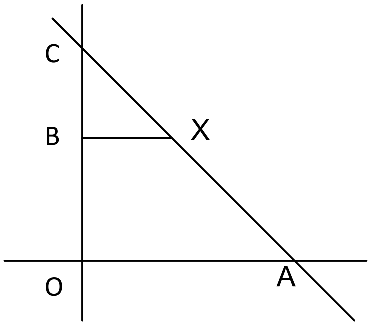
1. ניתן להעביר ישר $L(P,Q)$ בין כל שתי נקודות P,Q שכבר בנינו (בעזרת **סרגל**).
2. ניתן לבנות את המעגל $C(P,Q)$ שמרכזו P ועובר דרך Q (בעזרת **מחוגה**).

משפטים:

1. בהנתן נקודה וישר ניתן לבנות ישר מקביל העובר דרך הנקודה.
2. בהנתן נקודה וישר ניתן לבנות ישר אנכי העובר דרך הנקודה.
3. בהנתן זוית ניתן לבנות חצי-זוית.
4. ניתן לבנות מעגל $C(P,|QR|)$ שמרכזו P ורדיוסו $|QR|$.
5. בהנתן קטעים באורך $1, x, y$ ניתן לבנות קטעים $\sqrt{x}, x+y, xy, x^{-1}$.
6. אם $a \in \mathbb{C}$ ניתן לבניה מעל $\mathbb{Q}$ אזי $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$ הוא חזקה של 2.

תרגיל: בהנתן שני מספרים $a,b\in\mathbb{R}$ הראו שניתן לבנות מהם את $\frac{b}{a}$.

פתרון:



מתחילים עם הנקודות:

$O,=(0,0),\ \ A=(1,0),\ B=(0,a-b),\ \ C=(0,a)$.

מעבירים ישר מקביל ל $L(O,A)$ העובר דרך הנקודה B, ומסמנים את החיתוך של $L(O,A)$ ו- $L(A,C)$ ב X.

כעת המשולשים AOC ו- XBC הם דומים, ולכן $\left|BX\right|=\frac{|BX|}{|OA|}=\frac{|BC|}{|OC|}=\frac{b}{a}$.

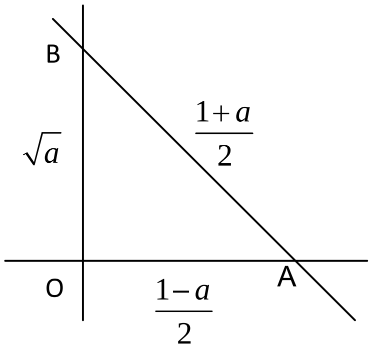
אם $X=(x,a-b)$ אזי $x=\left|BX\right|=\frac{b}{a}$ וקיבלנו את הדרוש.

תרגיל: בניית שורש ריבועי $\sqrt{a}$ עבור $a\geq 0$.

פתרון: נניח $0\leq a\leq 1$. אם a גדול מ 1, ניתן לחלק אותו בריבוע b^2 גדול ממנו, למצוא את השורש, ואז להכפיל ב b.

נשתמש בזהות $\sqrt{\left(\frac{1+a}{2}\right)^2-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2}=\sqrt{a}$.

נבנה משולש ישר זוית



איך בונים משולש כנ"ל? בוחרים $A=(\frac{1-a}{2},0)$. מציירים מעגל סביב A ברדיוס $\frac{1+a}{2}$. נקודת החיתוך של המעגל עם ציר y היא הנקודה B. כעת לפי משפט פיתגורס נקבל $|OB|=\sqrt{a}$.

תרגיל: הראו שלא ניתן לחלק ב 7 זוית θ הניתנת לבניה. כלומר קיימת זוית θ הניתנת לבניה כך שלא ניתן לבנות את הזוית $\frac{\theta}{7}$.

פתרון: נראה תחילה שהמספר $a=cis(\frac{2\pi}{7})$ אינו ניתן לבניה. המספר a הוא שורש של הפולינום הציקלוטומי $\Phi_7=\frac{x^7-1}{x-1}$. ראינו שפולינום זה אי-פריק ולכן $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]=\dim(\mathbb{Q}[x]/<\Phi_7>)=6$. 6 אינו חזקה של 2, ולכן המספר אינו ניתן לבניה.

כעת, הזוית $\pi/2$ ניתנת לבניה, ואם ניתן לחלק זויות ב 7, אזי הזוית $\frac{\pi}{14}$ ניתנת לבניה, ואז ניתן לבנות את המספר $cis\frac{\pi}{14}$ (ראו שאלה 4 בתרגיל 2). אם כך ניתן גם לבנות את $cis\frac{2\pi}{7}=\left(cis\frac{\pi}{14}\right)^4$, סתירה.