תרגול 9 - עוצמות

10 באוגוסט 2020

1 שיוויון עוצמות באמצעות פונקציות הפיכות

1. הוכיחו כי $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}|$.
<u>פתרון</u>: נגדיר פונקציה $F : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ ע"י:

$$F(X) = \begin{cases} \{1\} & X = \emptyset \\ \{n+1\} & X = \{n\} \\ X & |X| > 1 \end{cases}$$

הפיכה ע"י ההופכית: $G : P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\} \to P(\mathbb{N})$ המוגדרת:

$$G(X) = \begin{cases} \emptyset & X = \{1\} \\ \{n\} & X = \{n+1\} \\ X & |X| > 1 \end{cases}$$

"קל לראות" שההרכבה שני הצדדים נותנת את הזהות.

2. נסמן $A = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ קבוצת הנקודונים הטבעיים. הוכיחו כי $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N}) - A|$
<u>פתרון</u>: נגדיר פונקציה $F : P(\mathbb{N}) - A \to P(\mathbb{N})$. הרעיון הוא לקחת את כל הקבוצות מהצורה $\{n, 2n\}$ ולמתוח אותן באופן שיכסו את עצמן ואת הנקודונים. נגדיר זאת כך:

$$F(X) = \begin{cases} \{n, 2n\} & X = \{2n, 4n\} \\ \{n\} & X = \{2n-1, 2(2n-1)\} \\ X & else \end{cases}$$

הפיכה ע"י ההופכית $A - G : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ המוגדרת:

$$G(X) = \begin{cases} \{2n, 4n\} & X = \{n, 2n\} \\ \{2n-1, 2(2n-1)\} & X = \{n\} \\ X & else \end{cases}$$

3. תהא A קבוצה . הוכיחו כי $|A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}}| = |A^{\mathbb{N}}|$

פתרון: בהינתן פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ נרצה למתוח אותה לזוג של פונקציות (g, h).
נגדיר את הפונקציות g, h:

$$g(n) = f(2n)$$

$$h(n) = f(2n-1)$$

בצורה פורמלית הגדרנו $F : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}}$ ע"י $F(f) = (\{(n, f(2n)) : n \in \mathbb{N}\}, \{(n, f(2n-1)) : n \in \mathbb{N}\})$.
בכיוון ההפוך, בהינתן (g, h) נגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ ע"י:

$$f(n) = \begin{cases} g(\frac{n}{2}) & n = 2k \\ h(\frac{n+1}{2}) & n = 2k-1 \end{cases}$$

כלומר הגדרנו $G : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ ע"י $G(g, h) = \{(2n, g(n)), (2n-1, h(n)) : n \in \mathbb{N}\}$.
נראה הרכבה מצד אחד:

$$F \circ G(g, h) = F\left(\underbrace{\{(2n, g(n)), (2n-1, h(n)) : n \in \mathbb{N}\}}_{f}\right) = (\{(n, f(2n)) : n \in \mathbb{N}\}, \{(n, f(2n-1)) : n \in \mathbb{N}\}) =$$

$$= \left(\underbrace{\{(n, g(n)) : n \in \mathbb{N}\}}_{g}, \underbrace{\{(n, h(n)) : n \in \mathbb{N}\}}_{h}\right) = (g, h)$$

את הצד השני תעשו בעצמכם.

4. הוכיחו כי $|A \times A| = |A^{\{1,2\}}|$

פתרון: ניזכר שעבור קבוצות X, Y מתקיים: $X^Y = \{f \subseteq Y \times X : f \text{ is a function}\}$,
במילים: אוסף הפונקציות מ־Y ל־X.
כעת לפיתרון: אם $A = \emptyset$ אז בשני הצדדים מקבלים קבוצה ריקה ובפרט שיוויון עוצמות.
אחרת, נגדיר פונקציה $F : A^{\{1,2\}} \to A \times A$ ע"י:

$$F(f) = (f(1), f(2))$$

הפונקציה ההופכית תהיה $G: A\times A\to A^{\{1,2\}}$ המוגדרת: $G\left((a,b)\right)=\{(1,a),(2,b)\}\in$ $A^{\{1,2\}}$. כלומר הזוג (a,b) נשלח לפונקציה $f:\{1,2\}\to A$ המוגדרת:

$$f(1)=a, f(2)=b$$

כעת נראה שההרכבה היא הזהות:

$$F\circ G\left((a,b)\right)=F(G((a,b)))=F(\underbrace{\{(1,a),(2,b)\}}_{f})=(f(1),f(2))=(a,b)$$

$$G\circ F(\underbrace{\{(1,a),(2,b)\}}_{f})=G(F(f))=G((f(1),f(2)))=G((a,b))=\underbrace{\{(1,a),(2,b)\}}_{f}$$

5. הוכיחו כי אם $|A|=|B|$ אזי $|P(A)|=|P(B)|$

פתרון: נתון שיש $f:A\to B$ הפיכה (חח"ע ועל). צריך למצוא פונקציה $g:P(B)\to P(A)$ ע"י:

$$g(X)=f^{-1}[X]$$

ראינו בתרגול קודם שמתקיים: g על אמ"ם f חח"ע. בש"ב תראו g חח"ע אמ"ם f על. כעת, כיון ש־f חח"ע ועל נקבל ש־ g על וחח"ע, ולכן הפיכה.
הערה: ניתן היה להגדיר גם $h:P(A)\to P(B)$ ע"י $h(X)=f[X]$, וניתן להוכיח שהיא חח"ע ועל בהינתן ש־f חח"ע ועל.

6. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $|A|=|B|$ אז $|A\setminus B|=|B\setminus A|$

(ב) אם $|A\setminus B|=|A|$ אז $|B|<|A|$

פתרון: א. הפרכה: ניקח $A=\mathbb{N}, B=\mathbb{Z}$ ואז כמובן $|A|=|B|$ אך $|A\setminus B|=|\emptyset|=0\neq\aleph_0=|\mathbb{Z}^-|=|B\setminus A|$.
ב. הפרכה: ניקח $A=\mathbb{N}, B=2\mathbb{N}$, ונקבל שאכן $|A\setminus B|=|A|$ אבל גם $|A|=|B|$ ולכן $|B|\not<|A|$.

7. ניזכר שבתרגול על יחיסי שקילות ראינו את היחס הבא על הממשיים:

$$x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Z}$$

חשבו את $|\mathbb{R}/\sim|$.
פתרון: נקדים ונאמר, שבהינתן יחס שקילות $\sim$ על קבוצה X, אז מתקיים תמיד:

$$|X/\sim|\leq|X|$$

כי ניתן להגדיר $f: {}^{X}\!/\!_{\sim} \to X$ ע"י בחירת נציג מכל מחלקת שקילות, וזו פונקציה חח"ע. לחילופין ניתן להגדיר $g: X \to {}^{X}\!/\!_{\sim}$ ע"י $g(x) = [x]$ וברור שזו פונקציה על, ולפי טענה מההרצאה נקבל $|{}^{X}\!/\!_{\sim}| \leq |X|$. לסיכומו של עניין נקבל $|{}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\sim}| \leq \aleph$.

טענה: $|{}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\sim}| = |[0,1)| = \aleph$.

הוכחה: בתרגול על יחסי שקילות ראינו את הטענות הבאות:

(א) לכל $x, y \in [0,1)$ שונים מתקיים: $[x] \cap [y] = \emptyset$.

(ב) לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in [0,1)$ כך ש־ $[x] = [y]$.

אחרי שתיזכרו בפיתרון נקבל שניתן להגדיר פונקציה $f: [0,1) \to {}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\sim}$ ע"י $f(x) = [x]$. טענה א לעיל אומרת ש־ f חח"ע. טענה ב לעיל אומרת ש־ f על. ביחד f חח"ע ועל ולכן העוצמות שקולות.

הוכחת הטענות: א. יהיו $x, y \in [0,1)$ שונים. צ"ל $[x] \cap [y] = \emptyset$, ונעשה זאת ע"י להראות שאינם מתייחסים זה לזה: נניח בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) $x < y$. לכן:

$$0 \underbrace{<}_{y>x} y - x \underbrace{<}_{y<1} 1$$

ולכן נקבל $y - x \notin \mathbb{Z}$ ולכן $(x,y) \notin \sim$, ולכן $[x] \cap [y] = \emptyset$.

ב. בהינתן $x \in \mathbb{R}$ צריך למצוא $y \in [0,1)$ כך ש־ $[x] = [y]$. ניקח את $y = x - \lfloor x \rfloor$. צריך להוכיח שני דברים:

1. $[x] = [y]$: כי נתבונן בהפרש: $x - y = x - (x - \lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

2. $y \in [0,1)$. לפי הגדרת $\lfloor x \rfloor$ הוא השלם הגדול ביותר שקטן או שווה x ולכן כמובן $\lfloor x \rfloor \leq x \Rightarrow x - \lfloor x \rfloor \geq 0$. מאידך, $x - \lfloor x \rfloor < 1$ כי אם $x - \lfloor x \rfloor \geq 1$ אז $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x$ בסתירה להגדרה של הערך השלם כשלם הגדול ביותר שקטן או שווה x.

הערה: בעזרת שתי הטענות האחרונות נוכל לכתוב את קבוצת המנה בצורה מצומצמת:

$${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\sim} = \{[x] : x \in \mathbb{R}\} = \{[x] : x \in [0,1)\}$$

8. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים: $|\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

פתרון: בש"ב תראו שאם $|A| = |B|, |C| = |D|$ אז $|A \times C| = |B \times D|$. עכשיו באינדוקציה: בסיס: ברור. נניח נכונות ל־n ונוכיח ל־$n+1$:

$$|\mathbb{N}^{n+1}| = |\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}| \underset{*}{=} |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

מעבר $*$ מהנחת האינדוקציה + ש"ב.