מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 5

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

הסבר

בתרגיל זה ננסח מספר טענות חשובות לגבי הסגור הטרנזיטיבי ונוכיח אותן. לאחר מכן נשתמש בכלי החדש שפיתחנו. לאורך התרגיל מופיעות שאלות שיעורי הבית באדום עם מספר בסוגריים. דוגמה:

(0) הוכיחו או הפריכו: לכל סיר יש מכסה.

את השאלות הממוספרות עליכם לפתור ולהגיש במועד הגשת תרגיל בית זה.

תרגיל מודרך- הסגור הטרנזיטיבי

הגדרה- יהי R קבוצה יחס על A. הסגור הטרנזיטיבי של R, מסומן $tc(R)$, מוגדר להיות היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר על A המכיל את R, ז"א: $tc(R)$ טרנזיטיבי ומכיל את R, וכל יחס טרנזיטיבי על A המכיל את R מכיל גם את $tc(R)$.

לא ברור מההגדרה כי בכלל קיים סגור טרנזיטיבי לכל יחס, אם כי ברור שאם הוא קיים אז הוא יחיד. בנוסף, ההגדרה אינה מראה דרך מפורשת לבנות אותו. במהלך התרגיל אנו נוכיח הן את קיומו של הסגור הטרנזיטיבי והן בנייה קונסטרוקטיבית שלו.

למה 1

תהי $\{R_i\}_{i\in I}$ קבוצה לא ריקה של יחסים טרנזיטיביים על קבוצה A. הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I} R_i$ הוא יחס טרנזיטיבי על הקבוצה A.

(1) הוכיחו את למה 1.

תזכורת: תהי F קבוצה לא ריקה של קבוצות (כל איברי F הם קבוצות). נגדיר:

$$\bigcap F := \{a \mid \forall A\in F : a\in A\}$$
$$\bigcup F := \{a \mid \exists A\in F : a\in A\}$$

טענה 1

יהי R יחס על קבוצה A. נגדיר:

$$B := \{T\subseteq A\times A \mid T \text{ is transitive}, T\supseteq R\}$$

אזי $\bigcap B$ הוא הסגור הטרנזיטיבי של R, כלומר $tc(R)=\bigcap B$.

הוכחה: קודם כל נוודא כי אכן מוגדר $\bigcap B$, כלומר ש B היא אכן קבוצה לא ריקה של קבוצות. נשים לב כי $R\subseteq A\times A$ (לפי הגדרת היחס), וכי $A\times A$ הוא יחס טרנזיטיבי על A. לכן $A\times A\in B$ ובפרט B אינה ריקה.

עכשיו עלינו להראות כי $\bigcap B$ הוא היחס הטרנזיטיבי המינימלי המכיל את R. ברור ש $\bigcap B$ הוא יחס טרנזיטיבי כמסקנה מלמה 1. לכן נותר להראות מינימליות.

(2) הוכיחו: $\bigcap B$ הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר המכיל את R. כלומר, לכל יחס טרנזיטיבי T על A שמקיים $R \subseteq T$, מתקיים $\bigcap B \subseteq T$.

עתה $\bigcap B$ הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר המכיל את R ולכן מההגדרה הוא הסגור הטרנזיטיבי של R.

מ.ש.ל.

__מסקנה:__ לכל יחס R קיים סגור טרנזיטיבי.

עתה משאנו יודעים כי הסגור הטרנזיטיבי קיים, נמצא בנייה מפורשת שלו אשר תעזור לנו בהוכחות לגביו. הבנייה תהייה אינדוקטיבית כאשר הרעיון מאחורי הבנייה הוא שבכל שלב אנו מוסיפים את הזוגות ההכרחיים על פי טרנזיטיביות.

__הגדרה-__ יהי יחס R על קבוצה A. נגדיר באינדוקציה:

$R^1 := R$

$R^{n+1} := R^n \cup \{(a,b) \in A \times A \mid \exists c \in A : (a,c),(c,b) \in R^n\}$

__טענה 2__

יהי יחס R על קבוצה A. אזי מתקיים $tc(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

הוכחה: בעצם עלינו להוכיח כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ מקיים את הגדרת הסגור הטרנזיטיבי, כלומר שהוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר שמכיל את R.

(3) הוכיחו כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ הוא יחס טרנזיטיבי על A.

עתה נותר להוכיח מינימליות. כלומר, שכל יחס טרנזיטיבי המכיל את R מכיל גם את $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. לשם כך נניח כי T הוא יחס טרנזיטיבי המקיים $R \subseteq T$. נוכיח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים $R^n \subseteq T$:

מקרה $n=1$: במקרה זה הטענה ברורה, כיוון ש $R^1 = R$ מההגדרה, ולכן כיוון ש $R \subseteq T$ מהנתון מתקיים $R^1 \subseteq T$.

עתה נניח כי $R^n \subseteq T$, ונוכיח כי $R^{n+1} \subseteq T$.

(4) הוכיחו את שלב המעבר, כלומר שאם נתון $R^n \subseteq T$ אז מתקיים $R^{n+1} \subseteq T$.

בכך הוכחנו שלכל n טבעי, $R^n \subseteq T$. לכן מהגדרת האיחוד נובע $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq T$, כנדרש.

מ.ש.ל.

עתה, משמצאנו בנייה מפורשת לסגור הטרנזיטיבי, נוכל להשתמש בבנייה זו להוכחת טענות שונות לגביו, כמו הטענה הבאה:

<u>טענה 3</u>

יהי R יחס רפלקסיבי וסימטרי על קבוצה A. אזי $tc(R)$ הוא יחס שקילות על הקבוצה A.

הוכחה: החלקים הפשוטים בהוכחה הם ההוכחות ש $tc(R)$ הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

(5) הוכיחו כי במקרה זה $tc(R)$ הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

עתה נעבור להוכחה כי $tc(R)$ הוא יחס סימטרי. נוכיח את הטענה הזו באינדוקציה על הבנייה המפורשת של $tc(R)$.

<u>טענת עזר:</u> לכל n טבעי, R^n הוא יחס סימטרי על A.

(6) הוכיחו את טענת העזר.

עתה משהוכחנו את טענת העזר קל לראות כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ גם הוא סימטרי: יהי $(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, אזי מהגדרת האיחוד קיים n טבעי כך ש $(a,b) \in R^n$, עתה כיוון ש R^n סימטרי נקבל כי $(b,a) \in R^n$, ולכן גם $(b,a) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, כנדרש. עתה כיוון ש $tc(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, $tc(R)$ סימטרי.

בכך הוכחנו כי $tc(R)$ רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן הוא יחס שקילות על A.

מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> יהי R יחס רפלקסיבי וסימטרי על קבוצה A, אזי $tc(R)$ הוא יחס השקילות הקטן ביותר (ביחס להכלה) על A שמכיל את R.

הוכחה: הוכחנו כי $tc(R)$ יחס שקילות, נותר להוכיח כי הוא הקטן ביותר שמכיל את R.

יהי T יחס שקילות על A שמכיל את R, אזי מההגדרה T טרנזיטיבי. עתה כיוון ש $tc(R)$ הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר על A שמכיל את R, נקבל כי $tc(R) \subseteq T$, כנדרש.

מ.ש.ל.

עתה, משסיימנו להוכיח מספר טענות לגבי הסגור הטרנזיטיבי, נראה שימוש מעניין עבורו.

תזכורת: תהי קבוצה A ותת קבוצה שלה B. נגדיר יחס שקילות R_B על $P(A)$ באופן הבא:

$$\forall C_1, C_2 \in P(A) : (C_1, C_2) \in R_B \leftrightarrow C_1 \cap B = C_2 \cap B$$

(שימו לב כי זהו בדיוק R_B שהופיע בבוחן, כך שהוכחתם שזהו אכן יחס שקילות).

טענה 4

תהיינה $B_1, B_2 \subseteq A$. אזי מתקיים:

א) $R_{B_1 \cup B_2} = R_{B_1} \cap R_{B_2}$

ב) $R_{B_1 \cap B_2} = tc(R_{B_1} \cup R_{B_2})$

(7) הוכיחו את טענה 4.

הערה: שימו לב שסעיף א' בטענה 4 מכליל את סעיף ב' בשאלה 4 בבוחן, שאמר:

אם $B \subseteq C$ אז $R_C \subseteq R_B$.