7.1.15

בוחן – מבוא לחדוו"א 1

מרצה: פרופ' שחר נבו. מתרגל: ד"ר אפי כהן

הוראות לנבחן

1. ענה על 3 שאלות מתוך 4
2. הניקוד על כל שאלה זהה.
3. חומר עזר – מחשבון כיס בלבד.
4. חובה למק את תשובותיך – תשובה ללא נימוק לא תתקבל.

משך הבוחן: שעה וחצי.

שאלה 1

א. חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln^2 n+1}\right)^{2\ln^2\frac{1}{n}}$.

ב. חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(n!)^2}}$.

שאלה 1

סעיף א

נשים לב תחילה ש $\ln^2\frac{1}{n}=(-\ln n)^2=\ln^2 n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln^2 n+1}\right)^{2\ln^2\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n+1-1}{\ln^2 n+1}\right)^{2\ln^2 n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ln^2 n+1}\right)^{2\ln^2 n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ln^2 n+1}\right)^{\left(\ln^2 n+1\right)\cdot\frac{2\ln^2 n}{\ln^2 n+1}}$$

נשים לב שאם a_n סדרה כך ש $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ אז $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\frac{1}{e}$.

מכיוון ש $\lim_{n\to\infty}\left(\ln^2 n+1\right)=\infty$ נקבל ש $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ln^2 n+1}\right)^{\left(\ln^2 n+1\right)}=\frac{1}{e}$.

בנוסף $\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln^2 n}{\ln^2 n+1}=2$.

ואז $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n}{\ln^2 n+1}\right)^{2\ln^2\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ln^2 n+1}\right)^{\left(\ln^2 n+1\right)\cdot\frac{2\ln^2 n}{\ln^2 n+1}}=\frac{1}{e^2}$.

סעיף ב

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(n!)^2}}$.

נשתמש במשפט: תהיי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ אזי הסדרה $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים השוויון $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

$a_n=\frac{n^{2n}}{(n!)^2}$ סדרת מספרים חיוביים. נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(n!)^2}:\frac{(n-1)^{2n-2}}{((n-1)!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n-2}\cdot n^2}{((n-1)!)^2n^2}\cdot\frac{((n-1)!)^2}{(n-1)^{2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n-2}}{(n-1)^{2n-2}}.$$

נשאר לחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n-2}}{(n-1)^{2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{2n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^2=e^2$$

<u>שאלה 2</u>

א. חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^4-n^2}-3n^2\right)$.

ב. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^4-n^2}-3n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^4-n^2}-3n^2\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{9n^4-n^2}+3n^2\right)}{\left(\sqrt{9n^4-n^2}+3n^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^4-n^2-9n^4}{\sqrt{9n^4-n^2}+3n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{\sqrt{9n^4-n^2}+3n^2}=-\frac{1}{6}$$

<u>סעיף ב</u>

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}.$$

נחשב את האיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקיים $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}\right)$$

נשים לב שקיבלנו טור טלסקופי וש $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{4}$ סכום הטור הוא $\frac{1}{4}$.

<u>שאלה 3</u>

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נתון ש $0<a_n$ לכל n טבעי.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

לא נכון

דוגמא נגדית: ניקח $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

<u>סעיף ב</u>

נכון

נתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ז"א לכל $0<\varepsilon$, ובפרט עבור $\varepsilon=1$ קיים n_0 כך שלכל $n_0<n$ מתקיים $|a_n-0|<1$ ומכיוון ש $0<a_n$ נקבל $a_n<1 \Leftarrow a_n^2<a_n$.

על פי מבחן השוואה הראשון לטורים חיוביים ומכיוון שנתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ מתכנס.

<u>שאלה 4</u>

א. בדוק התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n/n+1}}$.

ב. מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה $a_n=1+\frac{n\cos\frac{n\pi}{3}}{n+2}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n/n+1}}$ הוא טור חיובי. נשתמש במבחן השוואה השני.

נסמן $b_n=\frac{1}{n+1}$, $a_n=\frac{1}{(n+1)^{\frac{n}{n+1}}}$. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^{\frac{n}{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}=1$.

השוויון האחרון נובע מהגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ שראיתם בהרצאה.

מכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ מתבדר, נקבל שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n/n+1}}$ מתבדר.

<u>סעיף ב</u>

$a_n=1+\frac{n\cos\frac{n\pi}{3}}{n+2}$.

האפשרויות שייתכנו:

אפשרות 1: $6,12,18,...$ ואז נקבל את הסדרה $a_n=1+\frac{n}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}2$.

אפשרות 2: $1,5,7,11,13,15,...$ ואז נקבל את הסדרה $a_n=1+\frac{n}{2(n+2)}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{2}$.

אפשרות 3: $2,4,8,10,14,16,...$ ואז נקבל את הסדרה $a_n=1-\frac{n}{2(n+2)}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}$.

אפשרות 4: $3,9,15,21,...$ ואז נקבל את הסדרה $a_n=1-\frac{n}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}0$.

הגבולות החלקיים הם: $2,\frac{3}{2},\frac{1}{2},0$.

בהצלחה!