

## מבוא לאלגברה לינארית, מועד א', תש"ף

מרצה: תמר בר-און.  
מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.  
משך המבחן: 3 שעות.  
חומר עזר: מחשבון פשוט.  
עליכם לענות על כל השאלות. בכל שאלה יש להראות את החישובים הנצרכים ודרך הפתרון.

1. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + (a - 1)y + (a^2 + 1)z = a + 10 \\ 2x + (4 - a)y - 2z = 10 \end{cases}$$

(א) (15 נקודות) קבעו לאילו ערכי  $a$  יש למערכת: פתרון יחיד, אין פתרון, אינסוף פתרונות.  
(ב) (5 נקודות) במקרה של אינסוף פתרונות, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת.

2. תהיינה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) (7 נקודות) חשבו את  $AB^t$   
(ב) (8 נקודות) קבעו האם  $AB^t$  הפיכה. במידה וכן, מצאו את ההופכית.  
(ג) (5 נקודות) חשבו את  $|AB^t|$ .

3. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נקודות) חשבו את הפולינום האופייני והערכים העצמיים של  $A$ .

(ב) (10 נקודות) קבעו האם  $A$  לכסינה. במידה וכן, מצאו  $P$  הפיכה ו- $D$  אלכסונית כך ש- $P^{-1}AP = D$ .

4. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) (15 נקודות) מצאו בסיס ומימד למרחב השורות של  $A$ , מרחב העמודות של  $A$ , ומרחב האפס של  $A$ .

(ב) (5 נקודות) קבעו האם  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  שייך למרחב העמודות של  $A$ . הוכיחו את קביעתכם.

$$5. \text{ יהיו } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נקודות) חשבו  $\pi_w(v)$ .

(ב) (10 נקודות) חשבו את הזווית שבין הוקטורים:  $w, v - \pi_w(v)$ .

## נוסחאות עזר:

1. חישוב דטרמיננטה לפי מינורים: פיתוח לפי שורה  $i$  מחושב  $|M_{i,j}|$  מחושב  $A_{i,j} (-1)^{i+j}$   $|A| = \sum_{j=1}^n$

2. הזווית  $\theta$  בין וקטורים  $u, v$  מוגדרת ע"י  $\cos \theta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|}$  (כאשר  $\theta \in [0, \pi]$ )

3. הטלה של וקטור  $v$  על  $w$  (ניתן גם לומר על:  $W = \text{span}\{w\}$ ) הוא  $\pi_W(v) = \pi_w(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w$