

תרגיל 9

1. תנו דוגמה לסדרה של פונקציות f_n חיוביות עולות ואינטגרביליות רימן אשר מתכנסות נקודתית לפונקציה f חסומה אך איננה אינטגרבילית רימן. תרגיל זה מראה כי משפט ההתכנסות המונוטונית ומשפט ההתכנסות החסומה איננו תקף עבור אינטגרלי רימן.

2. מצאו פונקציה $f : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ולא אינטגרבילית לבג אך כך שהאינטגרל רימן הלא אמיתי שלה קיים. כלומר, אנו רוצים ש $\int_0^1 |f| dm = \infty$ אבל ש $\lim_{a \rightarrow 0^+} R(f1_{(a,1]})$ קיים.

3. נניח $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית, f חסומה על $(a,1]$ לכל $a > 0$ ואינטגרל רימן הלא אמיתי $\lim_{a \rightarrow 0^+} R(f1_{(a,1]})$ קיים. הראו כי הגבול שווה ל $\int_0^1 f(x) dm$.