1. א) העמודות של AB בת"ל $\Leftarrow$ $rankAB =$ מספר העמודות של $AB = k$.
אז קיים: $rankAB \le rankB = k$. ל-B יש k עמודות
$\Leftarrow$ $\dim C(B) = rankB = k$. כלומר כל העמודות של B בת"ל.

ב) אם העמודות של B הן בת"ל אז $rankB=k$ כי $rank B = \dim C(B)$. [illegible]
$rankAB \le rankA, rankB$
אם כל העמודות של AB בת"ל אז $rank AB = k$.
כלומר מקבלים
$rankAB = k \le rank A, k$
$\Leftarrow$ $k \le rank A$.

2. א) נניח ש-$\{v_1, v_2\}$ בסיס ב-$\mathbb{R}^2$ לכל $v \in \mathbb{R}^2$ קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ יחידים כך ש- $v = a v_1 + b \cdot v_2$. נוכיח כי תמיד אפשר להציג v בצורה יחידה ע"י $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w$ כך ש- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. כלומר:
$$v = a v_1 + b v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 (v_1 + v_2) = (\alpha_1 + \alpha_3) v_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot v_2$$
כלומר מקבלים מערכת משוואות:
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 = b \end{cases}$$
בגלל שמדרג'. של מערכת הנ"ל
כי לא סינגולרית מקבלים שלכל a,b קיים פתרון יחיד.
כלומר כל v ניתן להציג יחיד $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 \cdot w$.

ב) יהי $U = Span(A) \subsetneq V$. A אינה פורשת $\Leftarrow$ קיים $v \in V$ כך ש- $v \notin Span(A)$. אז $A \cup \{v\}$ בת"ל. נוכיח זה:
נסמן $A = \{v_1, \dots, v_k\}$. אם $A \cup \{v\}$ ת"ל אז קיימים $a_1, \dots, a_k, a \in F$ כך ש- $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a \cdot v = 0$ ולא כל המקדמים הם אפסים.
אם $a = 0$ אז קיבלנו ש-$\{v_1, \dots, v_k\}$ ת"ל. כלומר $a \ne 0$. אבל אז $v = \frac{1}{a}(a_1 v_1 + \dots a_k v_k)$ כלומר $v \in Span(A)$ — סתירה.
$\Leftarrow$ $A \cup \{v\}$ בת"ל.

3. א) מערכת היא שקולה ל: מעל $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{cases} -\bar{1}\cdot x-\bar{1}\cdot y-\bar{1}\cdot z=0 \\ x+y+z=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases}$$

כאמור היא שקולה למשוואה אחת $x+y+z=0$
מעל $\mathbb{Z}_3$.

יש 2 משתנים חופשיים ⇐ מימד הפתרונות הוא 2.
מעל $\mathbb{Z}_3$ בכל מרחב ממימד 2 יש 3^2 וקטורים.
תשובה $9=3^2$ פתרונות.

ב) שרקים

$$x^3=x^3+x^2+x+1-(x^2+x+1)$$

$$[x^3]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$\in$

4.א) לפי נוסחת המימדים מתקיים:

$$\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$$

גם מתקיים $\dim(U+W) \le \dim V \Leftarrow U+W \subseteq V$

ואז מתקיים $0 < \dim U + \dim W - \dim(U+W) = \dim(U\cap W)$

כי: $0 < \dim U + \dim W - \dim V \le \dim U + \dim V - \dim(U+W)$.

הוכחנו: $\dim(U+W) > 0$, B ואז $U\cap W \neq \{0\}$.

ב) לפי נוסחת המימדים מתקיים

$$(*)\quad \dim(U+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(U\cap W)$$

וגם נכון ש $\dim(U\cap W) \le \dim U, \dim W \Leftarrow U\cap W \subseteq U, W$

נסמן $\dim(U\cap W) = c$, $\dim U = a+c$, $\dim W = b+c$, $a,b,c \ge 0$ שלמים.

מקבלים לפי $(*)$:

$$\dim(U+W) = a+c+b+c-c = a+b+c$$

אבל נתון ש:

$$\dim(U+W) = c+1$$

$\Leftarrow a+b=1$. אבל a ו b הם מימדים ובפרט מספרים שלמים הלא שליליים.

$W \subseteq U \Leftarrow \dim W = \dim U\cap W \Leftarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ או $\Leftarrow$

$U \subseteq W \Leftarrow \dim U = \dim U\cap W \Leftarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ או.