1 שילוש מטריצות

סיימנו לדבר על לכסון מטריצות; הקריטריונים שבידינו ללכסון מטריצות הם רחבים ומספקים. עם זאת, ראינו שלא תמיד ניתן ללכסן מטריצות – למשל, ראינו את בלוק ז'ורדן. נרצה לדבר על מושג "חלש" יותר מלכסון, בזה שיהיה גם למטריצות שאינן לכסינות וגם למטריצות לכסינות. ואם לא מטריצה אלכסונית, אז ננסה משולשת (=משולשית):

הגדרה 1. אומרים ש-A **ניתנת לשילוש** אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-$P^{-1}AP$ מטריצה משולשת. המטריצה P נקראת **המטריצה המשלשת.**

בהגדרה של שילוש מטריצות לא ציינו האם המטריצה $P^{-1}AP$ משולשת עליונה או תחתונה. מסתבר שאין הבדל:

הערה 1. אם C מטריצה משולשת עליונה, אזי C דומה למטריצה משולשת תחתונה.

הוכחה. נגדיר את המטריצה

$$P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \dots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

(כלומר, 1–ים על האלכסון המקיים $i+j=n+1$, ובשאר אפסים).
קל לבדוק כי $P^2=I$, ולכן $P^{-1}=P$.
נסתכל על $P^{-1}CP$. מתקיים

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \dots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \dots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & c_{nn} \\ & \dots & \\ c_{11} & & \star \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \dots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{nn} & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & c_{11} \end{pmatrix}$$

□

הגדרנו שילוש מטריצות, והמטרה הייתה להחליש את הדרישות של לכסון; שיהיו בידינו יותר מטריצות שניתן לשלש מאשר ללכסן. המשפט הבא יראה לנו שהקריטריון לשילוש יחסית חלש, כלומר מטריצות רבות מקיימות אותו.

משפט 1. *מטריצה A ניתנת לשילוש אם ורק אם $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-A ניתנת לשילוש, זאת אומרת $A \sim C$, כאשר C משולשת. אזי,

$$p_A(x) = p_C(x) = \det(xI - C) = \det\begin{pmatrix} x-c_{11} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & x-c_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n}(x-c_{jj})$$

כדרוש.

דוגמא: האם המטריצה $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ ניתנת לשילוש?

פתרון: הפולינום האופייני הוא $(x-1)^2(x-2)^2$. פולינום זה מתפרק לגורמים לינאריים לכן המטריצה A ניתנת לשילוש.

לינארית 2 - תרגול 9

להזכיר הגדת של הפ"א, ט"ע, ו"ע, ר"א, ר"ג, לכסין...

הפולינום המינימלי:

פ"מ = פולינום מינימלי

הגדרה: תהי $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$.
"הפולינום המינימלי" של A הוא פולינום (1) מתוקן מדרגה (2) מינימלית
ש- A (3) מאפסת.

"פולינום מתוקן" זהו פולינום שהמקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 1. לדוג': $1\cdot x^3-2x+4$

סימון: $m_A(\lambda)$ הפול' המינימלי של A.
$P_A(\lambda)$ הפול' האופייני של A $=|\lambda I-A|$.

הערה: $m_A \mid P_A$
$\deg m_A(\lambda)\le \deg P_A(\lambda)$

דוג': (1) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$P_A(\lambda)=\lambda^3$

$m_A(\lambda)=\lambda$

כי אכן זהו פול' מתוקן מדרגה מינימלית ש- A מאפסת

(2) $I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

$P_I(\lambda)=(\lambda-1)^4$

$m_A(\lambda)=\lambda-1$

הערה: לא תמיד נוכל לקחת חזקה 1 כמו שעשינו בדוג' הנ"ל (שלקחנו י', (ג-1))

בס"ד

②

מציאת הפולינום המינימלי:

תמיד מתקיים שאם הפ"א הוא $P_A(\lambda)=(\lambda-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-a_l)^{k_l}$

אז הפ"מ יהיה מהצורה: $m_A(\lambda)=(\lambda-a_1)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-a_l)^{j_l}$

כאשר $1\le j_i\le k_i$ לכל $1\le i\le l$

<u>שימו לב</u> - לפולינום האופייני ולפולינום המינימלי יש אותם שורשים! (שהם הע"ע).

<u>דוג:</u> ① אם $P_A=(\lambda-1)(\lambda-5)$

אז מתקיים ש- $m_A=(\lambda-1)(\lambda-5)$ (המקדם של החזקה הכי גבוהה אצן 1)

② $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $P_A=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

ולכן

$$m_A \begin{cases}\nearrow (\lambda-2)^2(\lambda-1)\\ \searrow (\lambda-2)(\lambda-1)\end{cases}$$

איך נדע מי מהם? נציב את A ונבדוק. נתחיל להציב מזה עם החזקות הנמוכות יותר כי אם נקבל בו 0 אז אין טעם לבדוק אחד עם חזקות גבוהות יותר שהרי אנו רוצים פולינום <u>מינימלי</u>

<u>נציב:</u> $(A-2I)(A-I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ✓

ולכן $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$

<u>שאלה:</u> אם לשתי מטריצות יש את אותו פ"א האם יש להן אותו פ"מ?

<u>תשובה:</u> לא, נביא דוג:

$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $P_B=(\lambda-1)^2$ $m_B=(\lambda-1)^2$

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $P_A=(\lambda-1)^2$ $m_A=\lambda-1$

($\lambda-1$ לא טוב כי $B-I\neq 0$ ולכן ניקח חזקה גבוהה יותר)

לכן אותו פ"א אבל פ"מ שונה!

בס"ד

משפט: אם $A,B\in F^{n\times n}$ מטריצות דומות
אז הפ"א שלהם זהה וגם הפ"מ שלהם זהה
הוכחנו שיעור שעבר

הערה: A,B דומות $\xRightarrow{\text{ע"פ המשפט הנ"ל}}$ אותו פ"א ואותו פ"מ
$\not\Leftarrow$ אולי כדאי להזכיר
ע"פ מטר' 2×2, 3×3...

הערות: 1. לכל פולינום f כך ש- $f(A)=0$ מתקיים $m_A | f$ ($f=m_A\cdot g$ (כלו')) ← הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום שמאפס את A

2. מטריצה היא לכסינה $\Leftrightarrow$ הפ"מ מתפרק לגורמים לינאריים שונים

3. הפולינום האופייני של מטריצה ריבועית מסדר n הוא ממעלה n.

דוג: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $P_A=(\lambda-1)^2$ וניתן לחשב ולמצוא ש-
$m_A=(\lambda-1)^2$
אכן מתפרק לגורמים לינאריים אבל לא שונים.
ולכן A אינה לכסינה!

הערה: אם לשתי מטר' אותו פ"א $\Leftarrow$ לא אומר כלום בהכרח על דמיון
אם לשתי מטר' מאותו גודל אותו פ"מ $\Leftarrow$ לא בהכרח דומות.
דומות $\Leftarrow$ אותו פ"א ואותו פ"מ

תרגיל: תהי $A\in M_{10}(\mathbb{R})$. נתון $A^2=I$, $tr(A)=6$
חשבו פ"א, פ"מ של A.

פתרון: $A^2=I \Leftarrow A^2-I=0$ ← נגדיר פולינום
$g(x)=x^2-1 \Rightarrow g(A)=0$ ← נציב את A
ע"פ הערה 1: $m_A | g$

$m_A | g$ כאשר $g=(x-1)(x+1)$

ולכן האפשרויות לפ"מ הן: ~~א. 1 ← לא יתכן כי אם נציב את A מקיים שאר I ולא 0. (A אלא כפול לא יכול להיות פולינום מינימלי!)~~

א. $(x+1)$ ← לא יתכן כי אם כן אז

$A+I=0$ ולכן $A=-I$

$$\Rightarrow \underset{10\times 10}{A} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow tr(A) = -10$

והרי נתון $tr(A) = 6$

ב. $(x-1)$ ← גם לא יתכן,

כי אם כן אז $A-I=0$ ⇐ $A=I$

$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ← מטר' 10x10

⇐ $tr\, A = 10$

סתירה! נתון $tr\, A = 6$

ג. $(x+1)(x-1)$ ✓ זה הפ"מ

$$m_A(x) = (x+1)(x-1)$$

נמצא פ"א: כיוון שהפ"מ הוא $(x+1)(x-1)$ אז הפ"א הוא מהצורה $(x+1)^k(x-1)^{10-k}$

(כי סכ"ה דרגות הפ"א היינו 10 כי זו מטריצה 10x10)

(כי לפולינום האופייני והמינימלי יש אותם שורשים שהם הע"ע של המטריצה).

כמו, שמצאנו, הפ"מ מתפרק לגורמים לינאריים שונים ולכן עפ"י משפט המטריצה לכסינה (הערה 2 מהעמ' הקודם)

כ"א $A \overset{\text{דומות}}{\sim} D$

אלכסונית עם ע"ע על האלכסון

למטריצות דומות יש אותם ע"ע, אותה דטרמיננטה ואותה tr. לכן הע"ע של D הם רק ±1.

למטריצות דומות אותו פ"א ולכן מספיק למצוא את הפ"א של D.

נמצא את D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

8 פעמים

חישוב: $k(-1)+(10-k)(+1)=6$

$-k+10-k=6$

$2k=4$

$k=2$

נניח k פעמים ע"ע -1

ו-10-k פעמים ע"ע +1

נתון $tr(A)=6$ ולמטריצות דומות אותה עקבה ולכן $tr(D)=6$

ועל האלכסון של D יש רק הע"ע ±1

הפ"א ⇐ ~~$P_A(x)=(x+1)^2(x-1)^2$~~

והוא: $P_A(x) = \underset{k}{(x+1)^2}\,\underset{10-k}{(x-1)^8}$

~~מסקנה~~

~~משל~~

מש"ל.

שימו לב: אם A היא מטריצה מסדר n והיא נילפוטנטית אז $A^n=0$. (כלומר, יתכן שהאינדקס הנילפוטנטיות קטן מ-n ואז גם $A^n=0$). לכן אם $A^n\neq0$ אז A לא נילפוטנטית. כלומר, כדי לבדוק אם מטריצה A היא נילפוטנטית מספיק לבדוק עד סדר n, ואם עד סדר n: $A^n\neq0$ אז A לא נילפוטנטית. בסה"כ

תירגול 6 באלגברה לינארית

הנושא: מטריצות נילפוטנטיות וצורות ז'ורדן שלהן

הגדרה: תהי T טרנספורמציה לינארית או מטריצה ריבועית. T תיקרא נילפוטנטית, אם קיים r טבעי שעבורו $T^r=0$. אם T נילפוטנטית אז המעריך הקטן ביותר s, שעבורו $T^s=0$ נקרא אינדקס הנילפוטנטיות של T, ונאמר גם כי T נילפוטנטית מאינדקס s.

דוגמאות: א. תהי $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$. אז:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן A היא מטריצה נילפוטנטית, והאינדקס הנילפוטנטיות שלה הוא-3.

ב. תהי - $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$. אז: $A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$ ומכאן מקבלים באינדוקציה שלכל n טבעי: $A^n=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

כלומר, A אינה מטריצה נילפוטנטית.

ג. תהי $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ טרנספורמציה לינארית המוגדרת ע"י: $T(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,0,x_1,x_2,x_3)$. אז:

$$T^2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=T(0,0,x_1,x_2,x_3)=(0,0,0,0,x_1)$$

$$T^3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=T(0,0,0,0,x_1)=(0,0,0,0,0)$$

כלומר T היא טרנספורמציה נילפוטנטית מאינדקס 3.

ד. המטריצה $J_n=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&0&1&\\&&\ddots&\ddots\\&&&\ddots&1\\0&&&&0\end{pmatrix}$ מסדר n היא נילפוטנטית, וכן $(J_n)^k\neq0$ עבור $k=1,\dots,n-1$, ואילו $(J_n)^n=0$. לכן J_n היא מטריצה נילפוטנטית מאינדקס n.

בס"ד

הגדרה: א. בלוק ז'ורדן נילפוטנטי מסדר k הוא המטריצה הריבועית מסדר k בעלת הצורה:

$$\underset{(\text{סימון})}{J_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ב. מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית היא מטריצת בלוקים אלכסונית-

$$G = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{J_{n_1},\dots,J_{n_k}\}$$

זה סימון של מטריצת בלוקים אלכסונית שבאלכסון יש $J_{n_1},\dots,J_{n_k}$

כאשר לאורך האלכסון הראשי של G מופיעים בלוקי ז'ורדן מהסדרים $n_1,\dots,n_k$. לדוגמא-

$$G = \begin{pmatrix} J_3 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & J_2 & \\ 0 & & & J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ומתקיים: $(J_3)^3=0,\ (J_2)^2=0,\ (J_1)^1=0$.

משפט 1: כל מטריצה נילפוטנטית דומה למטריצת ז'ורדן נילפוטנטית.
או בלשון הטרנספורמציות-
תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית נילפוטנטית. אז קיים בסיס של V שביחס אליו T מיוצגת ע"י מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית.

משפט הקיום של צורת ז'ורדן

משפט 2: אם מטריצה נילפוטנטית A דומה למטריצת ז'ורדן נילפוטנטית

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k} \end{pmatrix}$$

אז מס' הבלוקים - k ומימדיהם $n_1,\dots,n_k$ נקבעים באופן חד משמעי ע"י המטריצה הנתונה, ומכאן A דומה למטריצת ז'ורדן G יחידה (עד כדי שינוי סדר הופעתם של בלוקי ז'ורדן ב- G).

משפט היחידות של צורת ז'ורדן

בס"ד

הערה: מטריצות ז'ורדן נילפוטנטיות המורכבות מאותם בלוקי ז'ורדן ונבדלות בסדר הופעת הבלוקים לאורך אלכסוניהן הן דומות זו לזו.
לכן נוכל להניח מלכתחילה ש: $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$. לפי המשפטים הנ"ל קיימת מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית אחת ויחידה: $diag\{J_{n_1}, \dots, J_{n_k}\}$ המקיימת $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ ודומה למטריצה נתונה A. מטריצה יחידה זו נקראת "צורת ז'ורדן" של A.

טענה: תהי A ~~מטריצה~~ נילפוטנטית, ונניח כי A דומה למטריצת ז'ורדן נילפוטנטית המורכבת מ- k בלוקים, כך שהבלוק הגדול ביותר הוא מסדר n_1. אז:

א. n_1 שווה לאינדקס הנילפוטנטיות של A.

ב. מס' הבלוקים k שווה ל- $n-\rho(A)$, כאשר n הוא הסדר של המטריצה A ו- $\rho(A)$ היא דרגתה.

דוגמאות:

א. מהי צורת ז'ורדן של המטריצה - $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

פתרון:
נחשב תחילה את אינדקס הנילפוטנטיות. לאחר חישוב מקבלים ש: $A^2=0$.
לכן אינדקס הנילפוטנטיות הוא 2. לכן, לפי הטענה הנ"ל, בלוק ~~[illegible]~~ ז'ורדן הגדול ביותר בצורת ז'ורדן של A הוא J_2, ושאר הבלוקים הם מסדר קטן או שווה ל- 2. לכן צורת ז'ורדן של A היא אחת מהמטריצות הבאות:

$$\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{pmatrix} J_2 & & 0 \\ & J_1 & \\ 0 & & J_1 \end{pmatrix}$$

וזאת מכיוון ש- A היא מטריצה מסדר 4.
לפי סעיף ב' של הטענה הנ"ל מס' הבלוקים הוא $n-\rho(A)$.
מכיוון שדרגת A שווה ל- 1 (יש רק שורה אחת בלתי תלויה ב- A), הרי מס' הבלוקים הוא - $n-\rho(A)=4-1=3$.
לכן צורת ז'ורדן של A היא:

$$\begin{pmatrix} J_2 & & 0 \\ & J_1 & \\ 0 & & J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$