מבוא לאלגברה לינארית -פתרון תרגיל 7 - אלגברת מטריצות

תרגיל 1. עבור המטריצות הבאות מצא את A^{-1} ורשום אותה ככפל של מטריצות אלמנטריות.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \quad \rho_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{-R_1\to R_1} \quad \rho_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{R_2-5R_1\to R_2} \quad \rho_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{R_3-3R_1\to R_3} \quad \rho_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{R_3-\frac{1}{2}R_2\to R_3} \quad \rho_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \xrightarrow{-\frac{1}{10}R_2\to R_2} \quad \rho_6=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \xrightarrow{2R_3\to R_3} \quad \rho_7=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{R_2+\frac{1}{10}R_3\to R_2} \quad \rho_8=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{R_1-3R_2\to R_1} \quad \rho_9=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

ו-

$$A^{-1} = \rho_9\rho_8\rho_7\rho_6\rho_5\rho_4\rho_3\rho_2\rho_1$$

מכאן (שאלה 2)ניתן להסיק ש-

$$A = \rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\rho_3^{-1}\rho_4^{-1}\rho_5^{-1}\rho_6^{-1}\rho_7^{-1}\rho_8^{-1}\rho_9^{-1}$$

.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

פתרון.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2 \, [\rho_1]}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \to R_2 \, [\rho_2] \\ R_3 - R_1 \to R_3 \, [\rho_3] \\ R_4 - 2R_1 \to R_4 \, [\rho_4]}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-R_2 \to R_2 \, [\rho_5] \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \, [\rho_6]}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 - 2R_2 \to R_1 \, [\rho_7] \\ R_3 + 3R_2 \to R_3 \, [\rho_8] \\ R_4 + 2R_2 \to R_4 \, [\rho_9]}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3 \to R_3 \, [\rho_{10}]}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 - 3R_3 \to R_1 \, [\rho_{11}] \\ R_2 + R_3 \to R_2 \, [\rho_{12}] \\ R_4 + 3R_3 \to R_4 \, [\rho_{13}]}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{2}{3}R_4 \to R_4 \, [\rho_{14}]}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 - \frac{1}{2}R_4 \to R_1 \, [\rho_{15}] \\ R_2 - \frac{1}{2}R_4 \to R_2 \, [\rho_{16}] \\ R_3 - \frac{1}{2}R_4 \to R_3 \, [\rho_{17}]}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

כלומר

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$A^{-1}=\rho_{17}\rho_{16}\rho_{15}\rho_{14}\rho_{13}\rho_{12}\rho_{11}\rho_{10}\rho_{9}\rho_{8}\rho_{7}\rho_{6}\rho_{5}\rho_{4}\rho_{3}\rho_{2}\rho_{1}$$

מכאן (שאלה 2)ניתן להסיק ש-

$$A=\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\rho_3^{-1}\rho_4^{-1}\rho_5^{-1}\rho_6^{-1}\rho_7^{-1}\rho_8^{-1}\rho_9^{-1}\rho_{10}^{-1}\rho_{11}^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_{13}^{-1}\rho_{14}^{-1}\rho_{15}^{-1}\rho_{16}^{-1}\rho_{17}^{-1}$$

תרגיל 2. תהי $A_1,...,A_k$ מטריצות הפיכות הוכח ש-$\prod_{i=1}^{k} A_i = A_1\cdot ...\cdot A_k$ הפיכה ומצא למה היא שווה. (רמז: בתרגול ראינו עבור שתי מטריצות A,B)

פתרון.

בדומה למה שהראנו בכיתה יש להפוך את סדר המטריצות כלומר

$$(A_1\cdot ...\cdot A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot ...\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$$

כדי להוכיח את זה נבצע את הכפל הבא

$$\begin{aligned}
(A_1\cdot ...\cdot A_k)\left(A_k^{-1}\cdot ...\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}\right) &= \\
(A_1\cdot ...\cdot A_{k-1})\, I\left(A_{k-1}^{-1}\cdot ...\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}\right) &= \\
(A_1\cdot ...\cdot A_{k-2})\, I\left(A_{k-2}^{-1}\cdot ...\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}\right) &= \\
\vdots & \\
\vdots & \\
A_1A_1^{-1} &= \\
I &
\end{aligned}$$

כלומר

$$(A_1\cdot ...\cdot A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot ...\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$$

את הוכחה הפורמלית עושים בעזרת אינדוקציה.

תרגיל 3. תהי A מטריצה. הוכח או הפרך:

1. אם $A+A^2$ הפיכה אז A הפיכה.
2. אם A הפיכה אז $A+A^2$ הפיכה.
3. אם $A^2=A$ אז $A=I$ או A איננה הפיכה.

פתרון.

1. הוכחה: מתקיים $A+A^2=A(A+I)$ וראינו שאם מכפלת מטריצות היא הפיכה אז כל אחת מהמטריצות הפיכה. לכן A הפיכה.

2. הפרכה: ניקח $A=-I$ שהיא הפיכה. נקבל ש-$A^2=I$ ולכן $A+A^2=0$ לא הפיכה.

3. הוכחה: נניח $A^2=A$. אם $A=I$ סיימנו. אחרת (כלומר, $A\neq I$) נקבל ש-$A(A-I)=A^2-A=A-A=0$, וכיון ש-$A-I\neq 0$ נובע ש-A מחלקת אפס ולכן לא הפיכה.

תרגיל 4. האם המטריצות הבאות אלמנטריות?

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

פתרון.

1. כן, ניתן להגיע למטריצה בעזרת פעולת השורה R_2-5R_1 על מטריצת היחידה.
2. כן, ניתן להגיע למטריצה בעזרת פעולת השורה $\pi R_2 \to R_1$ על מטריצת היחידה.
3. לא,לא ניתן להגיע ממטריצת היחידה למטריצה בעזרת פעולת שורה אחת, לכן אינה מטריצה אלמנטרית.
4. כן, ניתן להגיע למטריצה בעזרת פעולת השורה $R_1 \longleftrightarrow R_3$ על מטריצת היחידה.
5. לא,לא ניתן להגיע ממטריצת היחידה למטריצה בעזרת פעולת שורה אחת, לכן אינה מטריצה אלמנטרית.

תרגיל 5. מצאו את כל הערכים של α עבורם קיימת מטריצה $0\neq B\in\mathbb{C}^{4\times 3}$ כך ש-

$$B\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון.

עבור $B\neq 0$המטריצה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ צריכה להיות מחלקת אפס ולכן אינה הפיכה, נמצא עבור אילו ערכי α היא איננה הפיכה.

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\\ 1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-\alpha R_1 \to R_3]{R_2-R_1 \to R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha\\ 0 & 1-a & 1-\alpha^2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2 \to R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\\ 0 & \alpha-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 2-\alpha-\alpha^2\end{pmatrix}$$

כאשר $\alpha = 1, -2$ המטריצה לא הפיכה ולכן קיימת מטריצה B כך ש-

$$B\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

תרגיל 6. תהיינה A ו-B מטיצות ריבועיות מאותו סדר, כך שמתקיים $A^3 = I$ ו- $BA = A\left(A+I\right)$ הוכיחו שמתקיים

1. $A^{-1} = A^2$

פתרון.

$$A^3 = I \quad \Rightarrow \quad AA^2 = I$$

כלומר A הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^2$

2. $B = A + I$

פתרון.

$$B = BAA^{-1} = A\left(A+I\right)A^{-1} = AAA^{-1} + AIA^{-1} = A + I$$

3. $BABA = A^2B^2$

פתרון.

$$BABA = \left(A\left(A+I\right)\right)^2 = \left(A^2+A\right)^2 = A^4+2A^3+A^2 = A^2\left(A+I\right)^2 = A^2B^2$$

בהצלחה!!