

מבוא לטופולוגיה – תרגיל 4 (פתרון)

שאלה 1

יהיו X, Y מרחבים מטריים. להוכיח:
(א) פונקציה $f: X \rightarrow Y$ רציפה במידה שווה היא רציפה.
(ב) אם X קומפקטי אז פונקציה $f: X \rightarrow Y$ רציפה היא רציפה במידה שווה.
(רמז: ולהשתמש במוסג "מספר לבג של כיסוי").

פתרון

נתבונן במשפחת תת-קבוצות של X $\{U_y\}_{y \in Y}$ כך ש- $U_y = f^{-1}\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.
כל U_y פתוחה כי f רציפה ו- $B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ פתוחה. לכל $x \in X$: $f(x) \in B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$
ולכן $x \in f^{-1}\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. זאת אומרת ש- $\{U_y\}_{y \in Y}$ כיסוי פתוח של X .
מכיוון ש- X קומפקטי לכיסוי הזה יש מספר לבג $\delta > 0$ (ההרצאות). יהיו $x_1, x_2 \in X$ כך
ש- $d_X(x_1, x_2) < \delta$. אזי $x_2 \in B(x_1, \delta)$. לפי הגדרתו של מספר לבג קיימת נקודה $y \in Y$
כך ש- $f(B(x_1, \delta)) \subseteq B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ולכן $B(x_1, \delta) \subseteq f^{-1}\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.
מזה מקבלים לפי אחשויון המשולש: $f(x_1), f(x_2) \in B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$
ו- $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), y) + d_Y(y, f(x_2)) < \varepsilon$ מצ"ל.

שאלה 2

תהי X קבוצה ו- τ קבוצה של תת-קבוצות של X . במקרים (א) - (ד) (כאן למטא):
(1) תוכיחו או תפריכו ש- τ – טופולוגיה על X .
(2) במידה ו- τ – טופולוגיה תמצאו את כל התת-קבוצות הסגורות
(3) במידה ו- τ – טופולוגיה תוכיחו או תפריכו שהמרחב הטופולוגי (X, τ) מטריזבילי.

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\} \quad X = \{a, b\} \quad \underline{\text{א}}$$

פתרון

(1) $\emptyset, X \in \tau$
 $\emptyset \cup X = X \in \tau, \emptyset \cup \{a\} = \{a\} \in \tau, \emptyset \cup X \cup \{a\} = X \in \tau, X \cup \{a\} = X \in \tau$

$\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau, \emptyset \cap \{a\} = \emptyset \in \tau, X \cap \{a\} = \{a\} \in \tau$ לפי ההגדרה.

(2) התת-קבוצות הסגורות: $\emptyset, X, \{b\}$.

(3) (X, τ) אינו מטריזבילי: נניח – בשלילה – שכן, אזי הכדור $B(b, \frac{1}{2})$ אבל הוא שווה לנקודון $\{b\}$ שאינו פתוח. סתירה.

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}\} \quad X = \{a, b, c\} \quad (\underline{ב})$$

פתרון

(1) $\emptyset, X \in \tau$

אחוד: \emptyset לא משפיעה לאף אחוד, לכן מותר לא להוסיף אותה לאחודים. כל אחוד עם X שווה X ולכן פתוח. נשארו האחודים:

$$\{a, c\} \cup \{b, c\} \cup \{c\} = X \in \tau$$

$$\{a, c\} \cup \{b, c\} = X \in \tau$$

$$\{a, c\} \cup \{c\} = \{a, c\} \in \tau$$

$$\{b, c\} \cup \{c\} = \{b, c\} \in \tau$$

חתוך: X לא משפיעה לאף חתוך, לכן מותר לא להוסיף אותה לחתוכים. כל חתוך עם \emptyset שווה \emptyset ולכן פתוח. נשארו החתוכים:

$$\{a, c\} \cap \{b, c\} \cap \{c\} = \{c\} \in \tau$$

$$\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\} \in \tau$$

$$\{a, c\} \cap \{c\} = \{c\} \in \tau$$

$$\{b, c\} \cap \{c\} = \{c\} \in \tau$$

τ - טופולוגיה לפי ההגדרה.

(2) תת-קבוצות הסגורות: $\{b\}, \{a\}, \{a, b\}, \emptyset, X$.

(3) (X, τ) אינו מטריזבילי: נניח – בשלילה – שכן, אזי הכדור $B(b, \frac{d(a,b)}{2})$ אבל הוא שווה לנקודון $\{b\}$ שאינו פתוח. סתירה.

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}\} \quad X = \{a, b, c\} \quad (\underline{ג})$$

פתרון. τ אינה טופולוגיה: $\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\} \notin \tau$.

(ד) תהי X קבוצה המכילה יותר מ-2 איברים.

יהיו: $Y = X - \{p\}, p \in X, \sigma$ – טופולוגיה כלשהי על הקבוצה Y .

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \cup \{p\} \mid U \in \sigma\}$$

פתרון.

$$(1) \quad \emptyset \in \tau, X = Y \cup \{p\} \exists \tau.$$

אחוד. יהיו $\tau \in V_\alpha$. אם באחד $\cup_\alpha V_\alpha$ כל ה- V_α ריקות אז גם החוד ריק ושייך ל- τ . אם לפחות אחת מהקבוצות V_α אינה ריקה, נסיר מהאחד את כל הקבוצות הריקות נקבל:

$$\cup_\alpha V_\alpha = \cup_\alpha (U_\alpha \cup \{p\}) = (\cup_\alpha U_\alpha) \cup \{p\}$$

כאשר $U_\alpha \in \sigma$ לכל α . מכיון ש- σ טופולוגיה על Y אז

גם $(\cup_\alpha U_\alpha) \in \sigma$. לכן $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

חיתוך יהי $n \in \mathbb{N}$ ו- $V_1, \dots, V_n \in \tau$. אם אחת מהקבוצות האלה ריקה אז גם חיתוכן ריק ושייך ל- τ . אחרת:

$$V_1 \cap \dots \cap V_n = (U_1 \cup \{p\}) \cap \dots \cap (U_n \cup \{p\}) = (U_1 \cap \dots \cap U_n) \cup \{p\}$$

כיון ש- σ טופולוגיה על Y אז גם $(U_1 \cap \dots \cap U_n) \in \sigma$

ולכן $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \tau$. לפי ההגדרה הוחכנו ש- τ טופולוגיה.

(2) הקבוצות הסגורות ב- (X, τ) הן: \emptyset, X וכל הקבוצות של סוג:

$$Y - U = (X - \{p\}) - U = X - (U \cup \{p\}) = X - U \text{ כאשר } U \text{ פתוחה ב-}(Y, \sigma).$$

ז"א, הקבוצות $Y - U$ סגורות ב- (Y, σ) . קיבלנו סופית שסגורת ב- (X, τ) הן: X והקבוצות הסגורות ב- (Y, σ) .

(3) (X, τ) אינו מטריזבילי: נניח – בשלילה – שכן, אזי לפי הגדרת X

קיימת נקודה $p \neq q$. נתבונן בכדור $B(q, \frac{d(p,q)}{2})$. הכדור לא ריק ואינו

מכיל נקודת p ולכן לא יכול להיות פתוח ב- (X, τ) . שסותר לפתיחות של הכדור.

שאלה 3 (מההרצאה האחרונה)

יהי X מרחב טופולוגי. יהיו A, B תת-מרכבים של X כך ש- $A \subseteq B \subseteq X$. להוכיח שלהשרות טופולוגיה ישירות מ- X ל- A או קודם להשרות טופולוגיה מ- X ל- B ולאחר מכן מ- B ל- A - זה אותו דבר.

הוכחה

נשתמש כאן בסימונים הבאים: אם S, T שני מרחבים טופולוגיים ו- $S \subseteq T$, נסמן את הטופולוגיה של T ב- τ_T ואת הטופולוגיה המושרתת מ- T ל- S ב- τ_{S_T} .

אז לפי הסימון הזה צריך להוכיח ש- $\tau_{A_{B_X}} = \tau_{A_X}$ לפי הגדרת הטופולוגיה המושרתת (ההרצאה):

$$\tau_{A_{B_X}} \subseteq \tau_{A_X}$$

$$U \in \tau_{A_{B_X}} \Rightarrow \exists V \in \tau_{B_X} : U = A \cap V$$

$$\begin{aligned}
V \in \tau_{B_X} &\Rightarrow \exists W \in \tau_X: V = B \cap W \\
U = A \cap B \cap W = A \cap W &\Rightarrow U \in \tau_{A_X} \\
&\cdot \tau_{A_{B_X}} \supseteq \tau_{A_X} \\
U \in \tau_{A_X} &\Rightarrow \exists W \in \tau_X: U = A \cap W = (A \cap B) \cap W = A \cap (B \cap W) \\
B \cap W \in \tau_{B_X} &\Rightarrow U = A \cap (B \cap W) \in \tau_{A_{B_X}}
\end{aligned}$$

שאלה 4 (מההרצאה האחרונה)

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו- $f: X \rightarrow Y$ פונקציה. להוכיח: f פונקציה רציפה אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה $p \in X$.

הוכחה

\Leftarrow תהי f רציפה, ו- $p \in X$ ו- $V \subseteq Y$ סביבה פתוחה של $f(p)$. לפי הגדרתה של פונקציה רציפה: $U = f^{-1}(V)$ - קבוצה פתוחה. ברור גם ש- $p \in U$.

וסופית: $f(U) = f(f^{-1}(V)) = V$. לכן f רציפה בנקודה p .

\Rightarrow תהי f רציפה בכל נקודה של X ותהי $B \subseteq Y$ פתוחה. נוכיח ש- $A = f^{-1}(B)$ פתוחה ב- X . לפי הנחה לכל $a \in A$ קיימת סביבה פתוחה U_a של a כך ש- $f(U_a) \subseteq B$. מזה נובע (לפי הגדרה של A) $U_a \subseteq A$. לפי הלמה השימושית (ההרצאות) $A = \bigcup_{a \in A} U_a$. לכן A פתוחה כאיחוד קבוצות פתוחות ואז f רציפה.

שאלה 5

תהי \mathbb{N} קבוצת מספרים טבעיים.

תהי $\tau = \{[n, \infty) \subseteq \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$

(א) תוכיחו ש- τ טופולוגיה על \mathbb{N}

הוכחה

(1) $\mathbb{N} = [1, \infty) \in \tau, \emptyset \in \tau$

(2) אחוד. $\bigcup_{\alpha \in I} [n_\alpha, \infty) = [\min_{\alpha \in I} \{n_\alpha\}, \infty) \in \tau$. (*)

אם נוסיף \mathbb{N} לאחוד (*) לפחות פעם אחת, אז כל האחוד יהיה שווה ל- \mathbb{N} ושייך

ל- τ . אם נוסף תת-קבוצות ריקות לאחד (*) אז התוצאה לא תשתנה. אם כל איברי האחד יהיו ריקות, אז גם האחד עצמו יהיה ריק ושייך ל- τ .
 (3) חיתוך. $\tau \in [\max\{n_1, \dots, n_k\}, \infty) = [n_1, \infty) \cap \dots \cap [n_k, \infty)$. (**)
 אם נוסף \emptyset לחיתוך (**) לפחות פעם אחת, אז כל החיתוך יהיה שווה ל- \emptyset ושייך ל- τ . אם נוסף קבוצות שוות ל- \mathbb{N} לחיתוך (**) אז התוצאה לא תשתנה. אם כל איברי החיתוך יהיו \mathbb{N} , אז גם החיתוך עצמו יהיה שווה ל- \mathbb{N} ושייך ל- τ .

(ב) יהי K מרחב טופולוגי סופי ותהי $f: K \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה. תוכיחו או תפריכו ש- f פונקציה פתוחה.

פתרון.

אם $K = \emptyset$ (מקרה מנוון!) אז אפשר להגיד שהפונקציה פתוחה.
 אם $K \neq \emptyset$ אז $f(K) \neq \emptyset$ וזאת קבוצה סופית. אבל בטופולוגיה τ (הסעיף הקודם) כל הקבוצות פתוחות ולא ריקות הן אינן סופיות. לכן $f(K)$ לא פתוחה ו- K פתוחה. אזי f פונקציה לא פתוחה.