<u>**תרגול 5**</u>

הגדרה

תהי A מטריצה ריבועית. אזי הפולינום המינימלי של A, מסומן $m_A(x)$ הוא הפולינום המתוקן מהדרגה הנמוכה ביותר המקיים

$$m_A(A) = 0$$

הערה: פולינום מתוקן הינו פולינום מהצורה $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, כלומר המקדם של המונום בעל החזקה הגבוהה ביותר הינו אחד.

תכונות

- לכל פולינום f כך ש $f(A) = 0$ מתקיים $m_A(x) | f(x)$. בפרט ממשפט קיילי-המילטון נובע כי הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני
- לפולינום האופייני והפולינום המינימלי בדיוק אותם גורמים אי פריקים. בפרט, השורשים של הפולינום המינימלי הם הערכים העצמיים של המטריצה.
  - o מסקנה: על מנת לחשב את הפולינום האופייני, נמצא את הפולינום המכיל את הגורמים האי פריקים של הפולינום האופייני, בחזקות הכי נמוכות, המאפס את המטריצה

תרגילים

א

הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי
הוכחה.

ראשית נשים לב לעובדה הבאה- יהי פולינום f ותהיינה מטריצות דומות A,B אזי גם המטריצות $f(A), f(B)$ דומות.

אכן, נסמן $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ונסמן $A = P^{-1}BP$. לכן:

$$f(A) = f(P^{-1}BP) = a_n(P^{-1}BP)^n + \ldots + a_0 I = a_n P^{-1}B^n P + \ldots + a_0 P^{-1}P = P^{-1}f(B)P$$

מסקנה: נניח A,B מטריצות דומות, אזי לכל פולינום f מתקיים $f(A) = 0$ אם"ם $f(B) = 0$.

אכן, המטריצה היחידה הדומה למטריצת האפס הינה מטריצת האפס עצמה. כיוון ש $f(A), f(B)$ דומות, המסקנה נובעת.
בסה"כ, כיוון שהפולינומים המאפסים מטריצות דומות הם אותם פולינומים, בפרט המינימלי המתוקן מבינהם הוא אותו אחד.

ב

תהי A ריבועית כך שהפולינום המינמלי שלה הינו

$$m_A(x) = (x-1)^2$$

יהא $f(x) = x^2 + 4x + 3$, הוכח כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

פתרון.

$$f(A) = A^2 + 4A + 3I = (A-I)^2 + 6A + 2I = 6A + 2I$$

כעת, נוכיח כי $|f(A)| \neq 0$ ולכן המטריצה הפיכה.

נניח בשלילה כי $|f(A)| = 0$ לכן $|6A + 2I| = 0$ ולכן $|A - \frac{-2}{6}I| = 0$

אם כן, $\frac{-2}{6}$ הוא ע"ע של המטריצה A, אבל הוא אינו שורש של הפולינום המינימלי הנתון, בסתירה.

ג

תהי A מטריצה אידמפוטנטית, כלומר $A^2 = A$

1. מהן האפשרויות לפולינום המינימלי של A ולע"ע של A?

2. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים

3. מהן האפשרויות עבור $tr(A)$?

פתרון.

1. השיוויון $A^2 = A$ שקול לכך שהפולינום $f(x) = x^2 - x = x(x-1)$ מאפס את המטריצה A.

כיוון שהפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המאפס את המטריצה, האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$f_2 = x$$
$$f_1 = x - 1$$
$$f_3 = x(x-1)$$

בהתאם הע"ע לכן יכולים להיות 0, 1 או שניהם יחד.

2. כיוון שהגורמים האי פריקים של הפולינום האופייני מופיעים בפולינום המינימלי, ומכיוון שהפולינום המינימלי כאן מכיל רק גורמים לינאריים, הפולינום האופייני חייב להתפרק לגורמים לינאריים.

3. כיוון שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, המטריצה ניתנת לשילוש. כיוון שלמטריצות דומות אותו trace, נובע שהtrace של מטריצה ניתנת לשילוש הוא סכום הע"ע כולל חזרות (הרי הם מופיעים על האלכסון של הצורה המשולשית).

ביחד, האפשרויות לtrace הן כל מספר טבעי בין 0 לבין n, כתלות בריבוי האלגברי של הע"ע 1. קל למצוא דוגמאות שכל ערך כזה אכן מתקבל.

ד

מצא את הפולינום המינימלי של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

פתרון.

$$p_A(x)=(x-1)^2(x-2)$$

לכן שתי האפשרויות היחידות לפולינום המינימלי הן:

$$(x-1)(x-2)$$
$$(x-1)^2(x-2)$$

נציב את המטריצה באופציה הראשונה (מדרגה נמוכה יותר) לגלות שאכן פולינום זה מאפס את המטריצה ולכן

$$m_A(x)=(x-1)(x-2)$$

ה

הוכח כי הפולינום המינימלי של מטריצת הבלוקים $A\oplus B=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$ הוא המכפלה המשותפת המינימלית של הפולינומים $lcm(m_A(x),m_B(x))$

הוכחה.

ראשית נשים לב כי לכל פולינום f מתקיים:

$f(A\oplus B)=f(A)\oplus f(B)$ (זה תרגיל קל בכפל מטריצות בלוקים).

לכן, אם $f(A\oplus B)=0$ אזי $f(A)=0$ וגם $f(B)=0$.

לכן, $m_A(x)|f(x)$ וגם $m_B(x)|f(x)$, כלומר f הוא כפולה משותפת של $m_A(x), m_B(x)$.

בכיוון ההפוך, כל כפולה משותפת של הפולינומים המינימליים תאפס את מטריצת הבלוקים.

ביחד, הפולינומים המאפסים את מטריצת הבלוקים הם בדיוק הכפולות המשותפות של הפולינומים המינימליים, ואנו מחפשים את המינימלי מבין כל הכפולות המשותפות.

<u>תרגיל ממבחן 2012 מועד א</u>

מצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A^t \cdot A$, כאשר A היא מטריצת השורה $(a_1,...,a_n)\in C^{1\times n}$.

<u>פתרון</u>

אם $n=1$ אז הערך העצמי הוא פשוט a_1^2.

נניח ש $n>1$

מכיון ש $rank\left(BA\right)\le rankA$ ו $rankA=1$ נקבל ש $rank\left(A^tA\right)\le 1$.

מכיון ש $n>1$ נקבל שהמימד של מרחב האפס של A^tA שונה מאפס מכיון ש

$\dim N\left(A^tA\right)=n-rank\left(A^tA\right)\ge n-1>0$ ולכן 0 הוא ערך עצמי של המטריצה A^tA.

אם הריבוי הגיאומטרי שווה ל n אז A^tA היא מטריצה האפס ו 0 הוא ערך עצמי שלה.

אם הריבוי הגיאומטרי הוא $n-1$ אז הריבוי האלגברי הוא לפחות $n-1$ ז"א הפולינום האופייני הוא מהצורה $f_A\left(x\right)=x^{n-1}\left(x-a\right)=x^n-ax^{n-1}$ (שימו לב שהפולינום מתוקן וייתכן ש $a=0$) ומכיון שהפולינום האופייני ממעלה n אז המקדם של המשתנה ממעלה $n-1$ שווה ל $tr\left(A^tA\right)$ ז"א הערך העצמי השני הוא $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

<u>תרגיל ממבחן 2010 מועד ב</u>

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, ותהיי $T:V\rightarrow V$ העתקה ליניארית.

א. הוכח כי אם T הפיך, אזי ל T ול T^{-1} יש אותם וקטורים עצמיים.

ב. הוכח כי המטריצות הממשיות הבאות הן דומות.

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

<u>**פתרון**</u>

א. נניח ש $v\in V$ וקטור עצמי של T ז"א $T(v)=\lambda v$ ואז
$T^{-1}(v)=T^{-1}\left(\lambda^{-1}\lambda v\right)=\lambda^{-1}T^{-1}(\lambda v)=\lambda^{-1}v$ ולכן הוא גם וקטור עצמי של T^{-1}.

אם $v\in V$ וקטור עצמי של T^{-1} אז לפי הנ"ל הוא גם וקטור עצמי של $\left(T^{-1}\right)^{-1}$ ומכיוון ש
$\left(T^{-1}\right)^{-1}=T$ קיבלנו את הדרוש.

ב. מכיוון שהמטריצות הנתונות הן מסדר 3 מספיק להראות שלשתיהן יש אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימאלי.

הפולינום האופייני של $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ הוא

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda^2(\lambda-3)$$

מכיוון ש

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נקבל שהפולינום המינימאלי הוא $\lambda(\lambda-3)$.

מכיוון ש

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ נקבל

שהפולינום המינימאלי הוא $\lambda(\lambda-3)$.

מכיוון שהדרגה של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ היא אחד אז המימד של מרחב האפס הוא 2 ולכן עבור ערך עצמי אפס נקבל ריבוי גיאומטרי 2 ז"א הריבוי האלגברי הוא לפחות 2 ומכיוון שהפולינום המינימאלי מחלק את הפולינום האופייני נקבל שהפולינום האופייני הוא $\lambda^2(\lambda-3)$.

סה"כ קיבלנו שלשתי מטריצות מדרגה 3 יש אותו פולינום אופייני ומינימאלי ולכן המטריצות דומות.

<u>תרגיל ממבחן 2001 מועד ב</u>

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. יהיו W_1, W_2 תת מרחבים של V כך ש $V = W_1 \oplus W_2$.

נגדיר $T : V \to V$ ע"י $T(w_1 + w_2) := w_1$ לכל $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. אזי

א. הראה ש T העתקה ליניארית.

ב. מצא את הגרעין ואת התמונה של T.

ג. מצא את הערכים העצמיים ואת המרחבים העצמיים של T.

ד. הוכח ש T ניתנת ללכסון.

<u>פתרון</u>

א. יהיו $\alpha \in F, v_1, v_2 \in V$ מכיוון ש $V = W_1 \oplus W_2$ אז קיימים $w_{11}, w_{12} \in W_1, w_{21}, w_{22} \in W_2$ כך ש

$$v_1 = w_{11} + w_{21}, v_2 = w_{12} + w_{22}$$

$$T(v_1 + \alpha v_2) = T((w_{11} + w_{21}) + \alpha(w_{12} + w_{22})) = T((w_{11} + \alpha w_{12}) + (w_{21} + \alpha w_{22})) = w_{11} + \alpha w_{12}$$
$$T(v_1) = T(w_{11} + w_{21}) = w_{11}, T(v_2) = T(w_{12} + w_{22}) = w_{12}$$

סה"כ קיבלנו ש $T(v_1 + \alpha v_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2)$.

ב. עבור $w \in W_2$ נקבל ש $T(w) = T(0 + w) = 0$ ולכן $w \in \ker T$. אם $w \in \ker T$ אז $w \in V$ ומכיוון ש $V = W_1 \oplus W_2$ אז $w = w_1 + w_2$ כאשר $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ ומכיוון ש $w \in \ker T$ נקבל ש $0 = T(w) = T(w_1 + w_2) = w_1$ ז"א $w = w_2 \in W_2$ סה"כ קיבלנו ש $W_2 = \ker T$.

ישירות מההגדרה נובע ש $W_1 = \operatorname{Im} T$.

ג.

ערך עצמי 1.

לכל $w\in W_1$ נקבל ש $T\left(w\right)=w$ ולכן המרחב העצמי הוא W_1.

ערך עצמי 0.

מסעיף קודם $W_2=\ker T$ ולכן W_2 הוא המרחב העצמי.

ד.

מכיוון ש $V=W_1\oplus W_2$ נקבל ש $\dim V=\dim W_1+\dim W_2$ נקבל שהריבוי הגיאומטרי שווה ל $\dim V$ ולכן T ניתנת ללכסון.