# הרצאה 18

## משפט על פונקציה הפוכה Inverse Function

$n = 1$
$f:(a,b) \to \mathbb{R}$
$f \in C^1(a,b)$
$f'(x) \neq 0$

### הגדרה

$U,V \subset\circ \mathbb{R}^n$

אומרים כי $\varphi: U \to V$ דיפאומורפיזם-$C^r$ אם:

1) $\varphi$ חח"ע "1-1"
2) $\varphi$ על : $\varphi(U) = V$
3) $\varphi \in C^r(V), \varphi^{-1} \in C^r(U)$

אומרים כי $U,V$ דיפאומורפים-$C^r$ אם קיים דיפאו'-$C^r$ ביניהם.

### הגדרה

$F,G \subset \mathbb{R}^n$ דיפאומורפים אם לכל $U,V \subset\circ \mathbb{R}^n$ כך ש $F \subset U, G \subset V$ קיימות $U_0 \subset\circ U, V_0 \subset\circ V$ כך ש $V_0 \sim U_0$ ($F \subset U_0. G \subset V_0$).

### משפט (על פונ' הפיכה)

$U,V \subset\circ \mathbb{R}^n, f: U \to V, f \in C^r(U), r \geq 1, a \in U$

נניח כי $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a) \neq 0$ אז קיימות סביבות $a \in U_0, f(a) = b \in V_0$ כך ש:

$\forall y \in V_0 \exists! x \in U_0 \,; x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$
$f^{-1} \in C^r(V_0), f^{-1}: V_0 \to U_0$

הוכחה

$W := U \times V$
$F(x,y) := y - f(x)$
$F: W \to \mathbb{R}^n \,; F \in C^r(W)$
$F(x,y) = 0$

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a,b) = -\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a) \neq 0$$

לפי משפט על פונ' סתומה:

$$\exists \underset{a\in}{U_0}, \underset{b\in}{V_0} \subset\circ \mathbb{R}^n : \forall y \in V_0 \exists! x \in U_0 : y - f(x) = F(x,y) = 0$$
$$y \to x = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1} C^r(V_0)$$

### מסקנה 1:

$$f\in C^r(U); U\subset\circ\ \mathbb{R}^n\ ; a\in U$$

$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x)\neq 0$ $\forall x\in U$ אזי $f(U)$ קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^n$

הוכחה

ניקח $y_0\in f(U)$ אזי $\exists x_0\in U : f(x_0)=y$

לפי משפט על פונ' הפיכה : $\exists x_0\in U_0\subset U, y_0\in V_0\subset\mathbb{R}^n$ כך שלכל $y\in V_0$ קיים ויחיד

$x\in U_0\subset U: f(x)=y$ ולכן $y\in f(U)$ אז $V_0\subset f(U)$

קיבלנו $\forall y_0\in f(U)\exists V_0\subset\mathbb{R}^n : V_0\subset f(U)$ ולכן $f(U)$ קבוצה פתוחה

### מסקנה 2:

אם $f: U\to V$ $\forall x\in U: \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x)\neq 0$ אז $f$ דיפאומורפיזם מקומי, כלומר לכל $a\in U, b\in V$ קיימות סביבות $V_b\ni b, U_a\ni a$ כך ש$f: U_a\to V_b$ היא $C^r$-דיפאומורפיזם.

דוגמא

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x)\neq 0 \nRightarrow f \text{ דיפאומורפיזם}$$

$$f(x_1,x_2)=(e^{x_1}\cos x_2\,, e^{x_1}\sin x_1)$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}=e^{2x_1}\neq 0$$

$$f(x_1,x_2+k\tau)=f(x_1,x_2+2k\pi)=f(x_1,x_2)$$

## מטריצת יעקובי על פונ' הפוכה

$$f: U\to V$$
$$f\in C^r(U); U,V\subset\circ\ \mathbb{R}^n$$

$$a\in U, b=f(a)\ ; \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)\neq 0$$

$$\exists f^{-1}: V_b\to U_a\ ; f^{-1}\big(f(x)\big)=x\in U_a$$

### כלל השרשרת

$$J_{f^{-1}}\big(f(a)\big)J_f(a)=I$$

$$\boxed{J_{f^{-1}}(b)=\big(J_f(a)\big)^{-1}}$$

$$d_{f^{-1}}\big(f(a)\big)\circ df(a)=I$$

$$\boxed{df_b^{-1}=(df_a)^{-1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial(f_1^{-1},\dots,f_n^{-1})}{\partial(y_1,\dots,y_n)}(b)=\frac{1}{\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots x_n)}(a)}}$$

## משפט

$$U \subset\circ \mathbb{R}^n \,; f: U \to \mathbb{R}^n \,, f \in C^r(U), r \geq 1$$

נניח כי $\forall x \in U \frac{\partial(f_1,..,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x) \neq 0$

אז $f(U)$ קבוצה פתוחה

אם $f$ חח"ע אז $f: U \to f(U)$-$C^r$-דיפאו'

## תרגיל בסגנון מבחן

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= e^{2y} + e^{2z} \\ f_2(x,y,z) &= e^{2x} - e^{2z} \\ f_3(x,y,z) &= x - y \\ f&: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

1) יעקוביאן:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -4e^{2y+2z} - 4e^{2x+2z} < 0$$

2) $f(x,y,z) = f(x',y'z')$ :

$$\begin{cases} e^{2y} + e^{2z} = e^{2y'} + e^{2z'} \\ e^{2x} - e^{2z} = e^{2x'} - e^{2z'} \\ \quad x - y = x' - y' \end{cases}$$

$$e^{2x} + e^{2y} = e^{2x'} + e^{2y'} \Rightarrow e^{2y}(e^{2x-2y} + 1) = e^{2y'}\left(e^{2x'-2y'} + 1\right) \Rightarrow y = y' \Rightarrow$$
$$x = x', z = z'$$

# משטחים דיפרנציאלים ב$\mathbb{R}^n$

קו ב$\mathbb{R}^2$ $ax+by-c=0$

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1 \\ a_{21}x+a_{21}y+a_{23}z=d_2 \end{cases}$$ קו $\mathbb{R}^3$ אם $rank(a_{ij})=2$

## הגדרה

$$\Phi: U \to \mathbb{R}^m; U \subset\circ\, \mathbb{R}^n \,; m \le n$$

אומרים כי $\Phi$ רגולרית בנקודה $a \in U$ אם $rank\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m,n}=m$ (מקסימלי!).

$a$ נקודה רגולרית.

## הגדרה

$$W \subset\circ\, \mathbb{R}^n \,; F: W \to \mathbb{R}^m, m \le n, F \in C^r(W)$$

הקבוצה $M=\{x \in W : F(x)=0\}$ משטח-$C^r$ אם כל נקודה ב$M$ רגולרית או אם $F$ רגולרית ב$W$

$$\dim M = n-m$$

$m=1$ משטח על *Hyperspace*.

### דוגמאות

$$M=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-1=0\}=S^2$$

$$W=\mathbb{R}^3, F \in C^\infty(W)$$
$$J_F(x,y,z)=\nabla F(x,y,z)=(2x,2y,2z)$$

אם $rankJ_F(x,y,z)=0$ אזי $x=y=z=0$ אבל $S^2 \notin (x,y,z)$ ולכן $S^2$-$C^\infty$-משטח. $\text{Dim}\, S^2=2$

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x+y+z=0$$

$$J_F(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rank\, J_F<2 \Rightarrow (2x,2y,2z)=\lambda(1,1,1) \Rightarrow x=y=z=\frac{\lambda}{2}$$

$$x+y+z=0 \Rightarrow (0,0,0) \notin M$$
$$\dim M = 3-2=1$$