תרגיל: תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $\begin{cases} a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2} \\ a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \end{cases}$. מצא את הגבולות החלקיים של $\{a_n\}$.

פתרון:

דבר ראשון נסתכל על האיברים הראשונים של הסדרה על מנת להבין כיצד היא מתנהגת:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_{2\cdot 1} = \frac{a_{2\cdot 1-1}}{2} = \frac{a_1}{2}$$

$$a_3 = a_{2\cdot 1+1} = \frac{1}{2} + a_{2\cdot 1} = \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2} = \frac{1+a_1}{2}$$

$$a_4 = a_{2\cdot 2} = \frac{a_{2\cdot 2-1}}{2} = \frac{a_3}{2} = \frac{\frac{1+a_1}{2}}{2} = \frac{1+a_1}{4}$$

$$a_5 = a_{2\cdot 2+1} = \frac{1}{2} + a_{2\cdot 2} = \frac{1}{2} + \frac{1+a_1}{4} = \frac{3+a_1}{4}$$

$$a_6 = \frac{3+a_1}{8}$$

$$a_7 = \frac{7+a_1}{8}$$

$$a_8 = \frac{7+a_1}{16}$$

$$a_9 = \frac{15+a_1}{16}$$

$$a_{10} = \frac{15+a_1}{32}$$

קודם כל רואים שהמכנה הוא תמיד חזקה של 2, וחוזר על עצמו פעם בזוגיים ופעם באי זוגיים. דבר שני, רואים שהמונה הוא תמיד חזקה של 2 פחות 1 ועוד האיבר הראשון של הסדרה. במונחים של n זה אומר:

$$a_{2n} = \frac{2^{n-1}-1+a_1}{2^n} \quad \text{ו-} \quad a_{2n+1} = \frac{2^n-1+a_1}{2^n}$$

עכשיו נותר להוכיח את זה. קודם כל נוכיח את המשוואה הראשונה באינדוקציה:

הנחת האינדוקציה: $a_{2n}=\frac{2^{n-1}-1+a_1}{2^n}$

עבור $n=1$ מקבלים $a_2=\frac{2^0-1+a_1}{2^1}=\frac{a_1}{2}$ נכון.

נניח נכון עבור n נוכיח עבור $n+1$:

$$a_{2(n+1)}=\frac{2^{n+1-1}-1+a_1}{2^{n+1}}=\frac{2^n-1+a_1}{2\cdot 2^n}=\frac{2\cdot 2^{n-1}-1+a_1}{2\cdot 2^n}=\frac{2^{n-1}+2^{n-1}-1+a_1}{2\cdot 2^n}=\frac{1}{2}\left[\frac{2^{n-1}}{2^n}+\frac{2^{n-1}-1+a_1}{2^n}\right]$$

אבל לפי הנחת האינדוקציה זה שווה ל

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2^{n-1}}{2^n}+\frac{2^{n-1}-1+a_1}{2^n}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+a_{2n}\right]$$

כלומר נותר להוכיח $a_{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+a_{2n}\right]$ אבל לפי הנתון

$a_{2(n+1)}=\frac{a_{2n+1}}{2}=\frac{1}{2}a_{2n+1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+a_{2n}\right]$ כפי שרצינו.

כעת נוכיח ש $a_{2n+1}=\frac{2^n-1+a_1}{2^n}$. לפי הנתון $a_{2n+1}=\frac{1}{2}+a_{2n}$ ולפי מה שהוכחנו לעיל זה שווה

$$a_{2n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2^{n-1}-1+a_1}{2^n}=\frac{2^{n-1}}{2^n}+\frac{2^{n-1}-1+a_1}{2^n}=\frac{2^{n-1}+2^{n-1}-1+a_1}{2^n}=\frac{2\cdot 2^{n-1}-1+a_1}{2^n}=\frac{2^n-1+a_1}{2^n}$$

כפי שרצינו.

לכן הוכחנו את הנוסחאות לפי n של האיברים הזוגיים ושל האיבריים האי זוגיים, ולכן קל לראות שגבול תת הסדרה המכיל את האיברים הזוגיים בלבד שווה ל:

$a_{n_k}=a_{2n}=\frac{2^{n-1}-1+a_1}{2^n}\to\frac{1}{2}$, $a_{n_j}=a_{2n+1}=\frac{2^n-1+a_1}{2^n}\to 1$.

לכן אלו גבולות חלקיים של הסדרה. בכיתה ראינו הוכחה לתרגיל דומה לכך שאלו הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה, ולכן $\overline{\lim}a_n=1$ ו $\underline{\lim}a_n=\frac{1}{2}$ (הגבולות החלקיים הגדול ביותר והקטן ביותר בהתאמה).