# פתרון מועד א' :

11 בפברואר 2013

1. בהרצאה

2. בהרצאה

3.

(א) $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$

$N(A)=N(\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix})=span(\{v_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\})$. כיוון $A$ סימטרית ניתן ללכסן אותה ובפרט ר"ג =ר"א לכל ע"ע ולכן ל $A$ יש ע"ע = 0 מריבוי 2 . בנוסף $trace(A)=9$ שווה סכום הע"ע כיוון שיש רק 3 ו2 מתוכם שווה 0 אזי השלישי שווה 9 .

* כמובן שניתן למצוא את זה בדרך ישירה אבל ראיתי סטודנט שפתר את זה ככה ושמחתי על האפשרות לקצר.

נהפוך את הו"ע הללו לא"ג בעזרת גרם שמידט $w_1=v_1$

$$w_2=v_2-\frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2}w_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}$$

נמצא ו"ע עבור ע"ע 9

$$N(A-9I)=N(\begin{pmatrix}-8&-2&2\\-2&-5&-4\\2&-4&-5\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}0&18&18\\-2&-5&-4\\2&-4&-5\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}0&18&18\\0&-9&-9\\2&-4&-5\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}2&-4&-5\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix})=$$

$$N(\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix})=spam(\{w_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\})$$

לכן אם ננרמל את הו"ע ונשים במטריצה $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{-2}{\sqrt5}&0&\frac{5}{3\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{-1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$ נקבל $P^tAP=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ או $A=$

$P\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^t$ כאשר $PP^t=I$

נגדיר $B=P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^t$ ונקבל

$$B^tB=B^2=P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^tP\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^t=P\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^t=A$$

(ב) הפירוק מתלכד עם הליכסון הא"ג מסעיף א'. הסבר:

$A=U\Sigma V^t$ כאשר $V,U$ א"ג ו $\Sigma$ בגודל של $A$ וכולה אפסים פרט לאלכסון ששם מסודרים מספרים מהגדול לקטן. אכן בפירוק $A=P\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^t$ מתקיים כל הנ"ל.

עוד הסבר: כיוון ש$A$סימטרית אזי $N(A)=N(A^t)$, $R(A)=C(A)$ ולכן $U=V$.

כיוון שהדרגה של $A$ היא 1 אזי המטריצה ב $\Sigma$ כולה אפסים חוץ מהמקום ה 1־1 ששם נמצא השורש של הע"ע של $A^tA$ כיוון ש $A$סימטרית זה בעצם שורש של הע"ע של $A^2$ ואכן $AAw_3=A9w_3=9^2w_3$ כלומר 81 ע"ע של $A^tA$ ו$w_3$ ו"ע

שלה. ולכן השורש הוא 9.
ב $V$ נמצאים הו"ע של $A^tA=A^2$ כמו מקודם $A^2w_i=\lambda_i^2w_i$ ולכן ה $w$־ים הם הו"ע המבוקשים וזה בדיוק $P$.

.4

(א) $A_n=\begin{pmatrix} 5 & 2 & & & \\ 2 & 5 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 2 & \\ & & 2 & 5 & 2 \\ & & & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ריבועית מגודל $n$. נחשב את הדטר' באינדוקציה:

עבור $n=1,2$ אכן מתקיים $|\,(5)\,|=5=\frac{1}{3}(4^{1+1}-1),\ |\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}|=25-4=21=\frac{1}{3}(4^{2+1}-1)$
עבור המקרה הכללי נפתח לפי שורה ראשונה ונשתמש בהנחת האינדוקציה

$$\begin{aligned} |A_n| &= 5|A_{n-1}|-2|\begin{pmatrix} 2 & 2 & & & \\ 0 & 5 & \ddots & & \\ & 2 & \ddots & 2 & \\ & & \ddots & 5 & 2 \\ & & & 2 & 5 \end{pmatrix}|=5|A_{n-1}|-4|A_{n-2}|=5\cdot\frac{1}{3}(4^{(n-1)+1}-1)-4\cdot\frac{1}{3}(4^{(n-2)+1}-1) \\ &= 5\cdot\frac{1}{3}(4^n-1)-4\cdot\frac{1}{3}(4^{(n-1)}-1)=(5\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3})4^n-(5\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{3})=4\cdot\frac{1}{3}4^n-(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1) \end{aligned}$$

והנחת האינדוקציה נשמרת. .

(ב) מהנתון ש $ABadj(BA)=I$ נובע כי כל אחת משלוש המטריצות הנ"ל הפיכה (ובפרט הדט' שלה שונה מ־0) כעת נשים את המשפט $Cadj(C)=|C|I$
ונקבל $(BA)adj(BA)=|BA|I$ מהנתון נובע כי $adj(BA)=B^{-1}A^{-1}$ וביחד נקבל $|BA|I=BAB^{-1}A^{-1}$ כלומר $|BA|AB=BA$ כעת נפעיל דטר' על 2 הצדדים ונקבל $|BA|^{n+1}=|BA|$ כלומר $|BA|=1$ וסימנו.

.5

(א) $T(\alpha p_1(x)+p_2(x))=\alpha p_1(0)+p_2(0)=\alpha T(p_1(x))+T(p_2(x))$ כלומר $T$ ה"ל
$img(T)=\mathbb{R}$ כי לכל $a\in\mathbb{R}$ הפולינום $a+x+x^2$ יקיים $T(a+x+x^2)=a$ לכן $Img(T)=span_{\mathbb{R}}(\{1\})$ והמימד הוא 1.
כיוון ש $dim(\mathbb{R}_2[x])=3$ נקבל ש $dimker(T)=3-1=2$ ואכן
$kerT=\{a+bx+cx^2=p(x)\in\mathbb{R}_2[x]\,|\,a=T(p(x))=0\}=span_{\mathbb{R}}(\{x,x^2\})$

(ב) קיימת, למשל $T(a+bx+cx^2)=(a,b)$

(ג) יהיה $B=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס ל $V$. ממשפט המימדים נובע כי $dim(kerT)+dim(ingT)=n$ כעת אם $T$ על אז $dim(ingT)=n$ וזה גורר $dim(kerT)=0$ כלומר $T$ חח"ע
בכיוון ההפוך אם $T$ חח"ע אזי $dim(kerT)=0$ וזה גורר $dim(ingT)=n$ כלומר $T$ על.

.6

(א) בעזרת הכלה דו כיוונית נראה כי $N(A)=N(A^tA)$ -
$(\subset)$- ברור
$(\supset)$ יהיה $x\in N(A^tA)$ אזי $A^tAx=0$ לכן גם $||Ax||=x^tA^tAx=x^t0=0$ כאשר מדובר בנורמה המושרית מהמכפלה הסקלארית ולכן $Ax=0$ כי וקטור האפס הוא היחיד עם נורמה 0 .
כיוון שוקטור האפס היחיד שמקיים $Ax=0$ כי עמודות $A$ בת"ל אזי וקטור האפס הוא היחיד שיקיים $A^tAx=0$ כלומר יש פתרון יחיד למשוואה הנ"ל ולכן עמודות $A^tA$ בת"ל (משפט מההרצאה) ולכן $A^tA$ הפיכה (היא מטריצה ריבועית)

(ב) $B=A(A^tA)^{-1}A^t$ ולכן $B^2=[A(A^tA)^{-1}A^t][A(A^tA)^{-1}A^t]=[A(A^tA)^{-1}][A^tA(A^tA)^{-1}]A^t=[A(A^tA)^{-1}][I]A^t=B$

(ג) נניח $\lambda$ ע"ע של $B$ אזי קיים $v$ שונה מאפס כך ש $Bv=\lambda v$ נפעיל $B$ על 2 הצדדים ונקבל $BBv=\lambda Bv=\lambda\lambda v=\lambda^2 v$ ומצד שני $B^2v=Bv=\lambda v$ ולכן נקבל $(\lambda^2-\lambda)v=0$ כיוון ש $v$ שונה מאפס אזי $(\lambda^2-\lambda)=0$ ולכן הע"ע היחידים שיכולים להיות הם 0 או 1

(ד) $B^t=[A(A^tA)^{-1}A^t]^t=(A^t)^t[(A^tA)^{-1}]^tA^t=A[(A^tA)^t]^{-1}A^t=A(A^tA)^{-1}A^t=B$ כלומר $B$ סימטרית ולכן לכסינה אורתוגונאלית