לינארית 1 לתיכוניסטים - תרגיל 5

1. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ההעתקה המוגדרת על ידי $T(x,y,z)=(x,y)$ מצאו את המטריצה המייצגת של T

   (א) ביחס לבסיסים הסטנדרטיים בתחום ובטווח.

   (ב) ביחס לבסיס $B=((1,0,1),(1,1,0),(0,1,0))$ בתחום ו $C=((2,1),(-3,-1))$ בטווח.

2. תהי T ההעתקה הלינארית הנתונה על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+4y+5z \\ 2y+6z \\ 3z \end{pmatrix}$$

   (א) מצאו את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי.

   (ב) מצאו בסיס ל $\operatorname{Ker} T$ ול $\operatorname{Im} T$.

   (ג) קבעו האם T היא על? האם T חח"ע?

3. תהי העתקה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_2[x]$, ויהיו בסיסים $C=(1+x,1-x^2,x^2)$ של הטווח ו $B=((1,1),(1,0))$ של התחום. ידוע כי

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (א) מצאו את התמונה של הוקטורים $(1,2)$ ו $(1,3)$.

   (ב) נתונים שני בסיסים נוספים $C_1=(1+x^2,x-2x^2,x)$ ו $B_1=((1,2),(1,5))$. מצאו את $[T]_{C_1}^{B_1}$.

   (ג) מצאו את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים הסטנדרטיים.

4. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ נגדיר העתקות לינארית $S,T:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ לפי

$$S(X)=AX+XA$$

$$T(X)=AX-XA$$

   (א) הוכיחו כי S,T הן העתקות לינאריות.

   (ב) האם S או T הפיכות? אם כן מצאו את ההופכית.

5. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^4=T$

(א) הוכיחו כי

$$V=\operatorname{Im}T^3+\operatorname{Ker}T$$

(ב) האם הסכום בסעיף א' ישר?

6. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ כך ש $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2=I$. נגדיר

$$W=\{v\in V\mid T(v)=v\}\quad U=\{v\in V\mid T(v)=-v\}$$

(א) הוכיחו כי U,W הם תתי מרחבים של V.

(ב) הוכיחו כי אם $T(v)=z$ אז $v+z\in W$ ו $v-z\in U$.

(ג) הוכיחו כי $V=U\oplus W$.

(ד) הוכיחו או הפריכו: לכל $v\in V$ מתקיים $T(v)=v$ או $T(v)=-v$.

7. יהי V מרחב וקטורי עם בסיס סדור $B=(b_1,b_2,b_3,b_4)$, מצא את $[T]_B^B$ במצבים הבאים:

(א) $T(b_1)=b_2,\quad T(b_2)=b_3,\quad T(b_3)=b_4,\quad T(b_4)=0$

(ב) $T(b_1)=b_2,\quad T(b_2)=0,\quad T(b_3)=b_1,\quad T(b_4)=0$

(ג) $T(b_1)=b_2,\quad T(b_2)=b_2+b_4,\quad T(b_3)=b_4,\quad T(b_4)=b_1+2b_3$

(ד) חזור על הסעיפים הקודמים, הפעם עם הבסיס הסדור $B=(b_3,b_4,b_1,b_2)$.

8. יהי $V=\mathbb{R}_1[x]$ ותהי $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}$, מצא שתי העתקות לינאריות $T,S:\mathbb{R}_1[x]\to\mathbb{R}_1[x]$ ושני בסיסים שונים B,C כך ש

$$[T]_B=[S]_C=A$$

9. מה יכול להיות $\dim\operatorname{Ker}T$ במצבים הבאים? (כלומר, אם אפשר למצוא אותו בדיוק, מצאו אותו. ואם אי אפשר, מצאו איזה ערכים הוא יכול להיות).

(א) $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^8$ העתקה לינארית מדרגה 5 (תזכורת $\operatorname{rank}T=\dim\operatorname{Im}T$)

(ב) $T:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^3$ כאשר T על.

(ג) $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^2$ כאשר $T\neq 0$.

10. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. ונניח ש $\dim V=\dim W$ הוכיחו כי T חח"ע אם ורק אם T על.

11. יהיו $V=\mathbb{Z}_p^3$ ו $W=\mathbb{Z}_p^5$ (p ראשוני כמובן). כמה העתקות לינאריות $T:V\to W$ מקיימות ש:

$$T(1,0,0)=(1,0,3,0,5),\quad T(0,2,3)=(1,1,-2,4,1).\quad T(0,3,2)=(0,1,0,3,0)$$

(רמז: התשובה תלויה ב p).