מערך תרגול 10

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

1 העתקת ויינגרטן, עקמומיות גאוס

תזכורת 1

א. תהי $p \in M$. העתקת ויינגרטן היא האנדומורפיזם $W_p : T_pM \to T_pM$ הנתון ע"י

$$.W_p(v) = \frac{d\left(n \circ \alpha(t)\right)}{dt}\Big|_{t=0}$$

באשר $\beta = x \circ \alpha$ עקומה המקיימת $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = v$.

ראיתם בהרצאה כי $\langle W(x_i), x_j\rangle = -\langle n, x_{ij}\rangle$, ומכיוון שצד ימין סימטרי ב־ i ו־ j מקבלים $\langle W(x_i), x_j\rangle = \langle x_i, W(x_j)\rangle$, כלומר העתקת ויינגרטן היא צמודה לעצמה. בפרט, יש לה ע"ע ממשיים.

ב. המקדמים ${L^i}_j$ של העתקת ויינגרטן מוגדרים ע"י

$$W(x_j) = {L^i}_j x_i = {L^1}_j x_1 + {L^2}_j x_2$$

ג. עקמומיות גאוס של משטח M הנתון ע"י הפרמטריזציה $x(u^1, u^2)$ מוגדרת ע"י

$$.K(u^1, u^2) = det(W_p) = det({L^i}_j) = {L^1}_1{L^2}_2 - {L^1}_2{L^2}_1$$

תרגיל 1 מיצאו את מקדמי העתקת ויינגרטן ${L^i}_j$ ואת עקמומיות גאוס עבור:

א. מישור.

ב. גליל.

ג. ספירה מרדיוס r.

פתרון 1

א. עבור מישור ראינו כי $W_p(v) \equiv 0$, כלומר,

$$\left(L^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

בפרט עקמומיות גאוס $K(u^1,u^2) \equiv 0$.

ב. עבור גליל ראינו כי $W_p(v^i x_i) = v^1 x_1$, כלומר,

$$\left(L^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

בפרט עקמומיות גאוס $K(u^1,u^2) \equiv 0$.

ג. עבור ספירה מרדיוס $r > 0$ ראיתם בהרצאה כי $W_p = \frac{1}{r} Id$ כלומר

$$\left(L^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\left(\delta^i{}_j\right) .$$

בפרט עקמומיות גאוס $K(u^1,u^2) \equiv \frac{1}{r^2}$.

תרגיל 2 נסתכל על החרוט $x(u^1,u^2) = (u^2\cos u^1, u^2 \sin u^1, u^2)$ עבור $u^2 > 0$.

א. מיצאו את וקטור הנורמל בכל נקודה.

ב. מיצאו את מקדמי $L^i{}_j$ של העתקת ווינגרטן.

ג. מיצאו עקמומיות גאוס.

פתרון 2

א.

$$\begin{aligned}
x_1 &= (-u^2\sin u^1, u^2\cos u^1, 0) \\
x_2 &= (\cos u^1, \sin u^1, 1) \\
|x_1 \times x_2| &= \left|(u^2\cos u^1, u^2\sin u^1, -u^2)\right| = \sqrt{2}u^2 \\
n &= \frac{(u^2\cos u^1, u^2\sin u^1, -u^2)}{\sqrt{2}u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos u^1, \sin u^1, -1)
\end{aligned}$$

ב. נחשב את $\frac{\partial n}{\partial u^1}, \frac{\partial n}{\partial u^2}$:

$$\frac{\partial n}{\partial u^1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin u^1, \cos u^1, 0)$$
$$\frac{\partial n}{\partial u^2} = \vec{0}$$

כלומר בהנתן $v = v^i x_i$ מתקיים

$$\begin{aligned} W_p(v^i x_i) &= v^1 \frac{\partial n}{\partial u^1} + v^2 \frac{\partial n}{\partial u^2} \\ &= v^1 \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin u^1, \cos u^1, 0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v^1}{u^2} x_1 \end{aligned}$$

בפרט

$$W_p(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2u^2} x_1, \qquad W_p(x_2) = 0,$$

כלומר,

$$\left(L^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2u^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ג. $K = det(W_p) \equiv 0$.

2 תבנית יסודית שניה

תזכורת 2

א. התבנית היסודית השניה II_p היא התבנית הבילינארית על המישור המשיק המוגדרת ע"י

$$II_p(u, v) = -\langle W_p(u), v \rangle.$$

ב. מקדמי L_{ij} של התבנית היסודית השניה מוגדרים לפי

$$L_{ij} = II_p(x_i, x_j) = -\langle \frac{\partial n}{\partial u^i}, x_j \rangle.$$

מתקיים $L_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle$ ובפרט (L_{ij}) סימטרית.

ג. מקדמים אלו הם אותם המקדמים שסימנו L_{ij} בשיעור על ספלי גמא כלומר הם מקיימים:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n$$

ד. קיים הקשר הבא בין מקדמי התבנית היסודית הראשונה g_{ij}, מקדמי התבנית היסודית השניה L_{ij}, ומקדמי העתקת ווינגרטן ${L^i}_j$:

$$L_{ij} = -{L^k}_j g_{ki}$$
$${L^i}_j = -g^{ik} L_{kj}$$

תרגיל 3 נתון הטורוס

$$x(\theta, \phi) = ((\cos\phi + 2)\cos\theta, (\cos\phi + 2)\sin\theta, \sin\phi)$$

א. מיצאו מקדמי התבנית היסודית הראשונה של הטורוס.

ב. מיצאו מקדמי התבנית היסודית השניה של הטורוס.

ג. מיצאו עקמומיות גאוס $K(\theta, \phi)$ של הטורוס.

פתרון 3

א. נשים לב שהטורוס הוא משטח הסיבוב של $(r(\phi), z(\phi)) = (\cos\phi + 2, \sin\phi)$, לכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\phi + 2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ב. נמצא את מקדמי התבנית היסודית השניה לפי הנוסחה $L_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle$. ראשית נמצא את הנורמל

$$x_\theta = (-\sin\theta(\cos\phi + 2), \cos\theta(\cos\phi + 2), 0)$$
$$x_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$
$$x_\theta \times x_\phi = (\cos\theta\cos\phi(\cos\phi + 2), \sin\theta\cos\phi(\cos\phi + 2), (\cos\phi + 2)\sin\phi)$$
$$n(\theta, \phi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi)$$

כעת

$$
\begin{aligned}
x_{\theta\theta} &= (-\cos\theta(\cos\phi+2), -\sin\theta(\cos\phi+2), 0)\\
x_{\theta\phi} &= (\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta\sin\phi, 0)\\
x_{\phi\phi} &= (-\cos\phi\cos\theta, -\cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)\\
L_{11} &= \langle x_{\theta\theta}, n\rangle = -(\cos\phi+2)\cos\phi\\
L_{12} &= \langle x_{\theta\phi}, n\rangle = 0\\
L_{22} &= \langle x_{\phi\phi}, n\rangle = -1
\end{aligned}
$$

ג.

$$
\begin{aligned}
L^i{}_j &= -g^{ik}L_{kj}\\
&= -\begin{pmatrix} (\cos\phi+2)^{-2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(\cos\phi+2)\cos\phi & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\cos\phi}{\cos\phi+2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

כלומר $K(\theta,\phi) = det(L^i{}_j) = \frac{\cos\phi}{\cos\phi+2}$.

נשים לב למשמעות הגאומטרית: עקמומיות גאוס 0 כאשר $\phi = \frac{\pi}{2}$ ו־ $\phi = \frac{3\pi}{2}$, עקמומיות גאוס חיובית כאשר $\frac{-\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$, ועקמומיות גאוס שלילית כאשר $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$.

תרגיל 4 בטאו את הביטויים הבאים באמצעות מקדמי התבנית היסודית הראשונה g_{ij}, מקדמי התבנית היסודית השניה L_{ij}, מקדמי העתקת וויגרטן $L^i{}_j$, וסמלי גמא Γ^k_{ij}.

א. $\langle x_j, x_{pq}\rangle \delta^j{}_r$

ב. $\langle x_{ab}, n_k\rangle \delta^a{}_c$

פתרון 4

א. סכימה j, חפשיים p, q, r.

$$\begin{aligned}
\langle x_j, x_{pq}\rangle \delta^j{}_r &= \langle x_r, x_{pq}\rangle \\
&= \langle x_r, \Gamma^\ell_{pq} x_\ell + L_{pq} n\rangle \\
&= \Gamma^\ell_{pq} \overbrace{\langle x_r, x_\ell\rangle}^{g_{r\ell}} + L_{pq} \overbrace{\langle x_r, n\rangle}^{0} \\
&= \Gamma^\ell_{pq} g_{r\ell}
\end{aligned}$$

ב. סכימה a, חפשיים b, c, k.

$$\begin{aligned}
\langle x_{ab}, n_k\rangle \delta^a{}_c &= \langle x_{cb}, n_k\rangle \\
&= \langle \Gamma^\ell_{cb} x_\ell + L_{cb} n, n_k\rangle \\
&= \Gamma^\ell_{cb}\langle x_\ell, n_k\rangle + L_{cb}\langle n, n_k\rangle \\
&= -\Gamma^\ell_{cb} L_{k\ell} + L_{cb} \overbrace{\langle n, W(x_k)\rangle}^{0} \\
&= -\Gamma^\ell_{cb} L_{k\ell}
\end{aligned}$$

כאשר $\langle n, W(x_k)\rangle = 0$ כי $W(x_k) \in T_pM$ ו־ n מאונך ל־ T_pM.