תרגיל בית 7 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך י"ז טבת ה'תשע"ז, 15.1.2017.

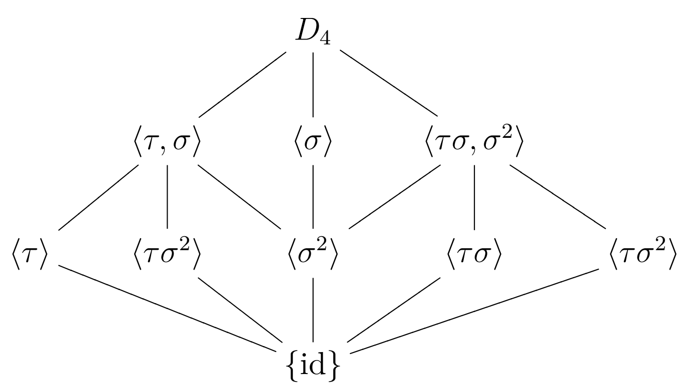
שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. מצאו את $|\mathrm{conj}(\sigma)|$ כאשר $\sigma = (2573) \in S_{14}$.

שאלה 2. תהי G חבורה פשוטה. הוכיחו כי אם $f\colon G \to H$ הוא הומומורפיזם אז הוא או שיכון (חח"ע) או ההעתקה הטריוויאלית (ששולחת כל איבר לאיבר היחידה).

שאלה 3. לפניכם שריג תת-החבורות של D_4:



רשמו את שריג התת-חבורות של $D_4/\langle \sigma^2 \rangle$ ואת כל המנות של חבורה זו.

שאלות להגשה

שאלה 4. תהי G חבורה סופית, ו$N \triangleleft G$ תת-חבורה נורמלית כך ש $(|N|, [G\colon N]) = 1$.
הוכיחו בעזרת משפטי האיזומורפיזם שאין ב-G עוד תת-חבורה מסדר $|N|$.

שאלה 5. קבע האם הפעולות הבאות של חבורה G על $\mathbb{R}^2$ היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של $(0,1)$ ושל $(1,1)$.

1. $G = \mathbb{R}$ עם הפעולה $t * (x,y) = (x+t, y+2t)$.
2. $G = \mathbb{Z}$ עם הפעולה $t * (x,y) = (tx, t^2x)$.
3. $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ עם פעולה $A * (x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

שאלה 6. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $G \ni x \neq e$ מתקיים $x^{-1} \notin \mathrm{conj}(x)$.

שאלה 7. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X ונגדיר

$$G_0 = \{g \in G \,|\, g * x = x \,\forall x \in X\}$$

.

1. הוכיחו כי G_0 היא תת-חבורה, ושהפעולה של G נאמנה אם ורק אם $G_0 = \{e\}$.
2. תהי $N \triangleleft G$ תת-חבורה נורמלית. הוכיחו כיG משרה פעולה של G/N על X אם ורק אם $N \subseteq G_0$.

שאלה 8. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. יהי $x \in X$, המייצב של x תחת הפעולה של G היא

$$\mathrm{stab}(x) = \{g \in G \,|\, g * x = x\}$$

1. הוכיחו כי המייצב הוא תת-חבורה של G.
2. הוכיחו כי אם $x, y \in X$ הם באותו מסלול, אז $\mathrm{stab}(x), \mathrm{stab}(y)$ הם תת-חבורות צמודות. כלומר שקיים $g \in G$ כך ש $g\,\mathrm{stab}(y)g^{-1} = \mathrm{stab}(x)$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. כעת נראה שקיים זוג של חבורות לא איזומורפיות המשוכנות אחת בתוך השנייה.

נזכיר כי חבורה A משוכנת בחבורה B אם קיים הומומורפיזם חח"ע $f : A \to B$.

נסמן $G = \bigcup_{n\geq 5} S_n$ איחוד כל חבורות הסימטריה S_n עבור $n \geq 5$, ונסמן $H = \bigcup_{n\geq 5} A_n$ איחוד כל חבורות החילופין A_n עבור $n \geq 5$.

הערה. אנו יכולים לראות את S_n כתת־חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. להמשך התרגיל נשתמש בנקודת מבט זו כשנדון בחבורות G ו-H.

1. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים שיכונים $A_n \hookrightarrow S_n \hookrightarrow A_{n+2}$. רמז: השיכון הראשון הוא ברור לפי הכלה. לשיכון השני הגדירו העתקה

$$\begin{aligned} &\phi_n : S_n \to A_{n+2} \\ &\sigma(i) \mapsto \begin{cases} \sigma(i-2)+2 & 3 \leq i \leq n+2 \\ 1 & i = 1 \wedge \operatorname{sign}(\sigma) = 1 \\ 2 & i = 2 \wedge \operatorname{sign}(\sigma) = 1 \\ 2 & i = 1 \wedge \operatorname{sign}(\sigma) = -1 \\ 1 & i = 2 \wedge \operatorname{sign}(\sigma) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

כלומר אם $3 \leq i \leq n+2$ אז $\phi_n(\sigma)(i) = \sigma(i-2)+2$; אם σ היא תמורה זוגית, אז נשלח אותה "להזזה" שלה בשני מקומות בתוך A_{n+2}, ואם σ תמורה אי־זוגית אז היא תשלח לאותה "הזזה" כפול החילוף $(1\,2)$. הראו מהבנייה כי תמונת ϕ_n מוכלת ב-A_{n+2} ושהיא הומומורפיזם מוגדר היטב. אתגר: חשבו למה אי אפשר לשכן את S_n בתוך A_{n+1} עבור $n \geq 2$.

2. הראו כי G משוכנת בתוך H.
הדרכה: בדרך אחת ניתן לשים לב כי החבורה G היא חבורת התמורות של $\mathbb{N}$ עם תומך סופי (התומך של תמורה הוא המספרים שהיא מזיזה. ב-S_n כל התמורות הן עם תומך סופי), והחבורה H היא חבורת התמורות הזוגיות של $\mathbb{N}$ עם תומך סופי. כעת אפשר להגדיר שיכון $\varphi : G \to H$ לפי $\varphi(\sigma) = (12)^{(\operatorname{sign}(\sigma)-1)/2}\rho\sigma\rho^{-1}$ כאשר $\rho(i) = i+2$.
בדרך אחרת יש להראות כי השיכונים בסעיף הקודם תואמים, כלומר $\phi_{n+1}(\sigma) = \phi_n(\sigma)$ לכל $n \geq 5$ ולכל $\sigma \in S_n$, וכך לבנות שיכון $\varphi : G \to H$.

3. הראו כי H משוכנת בתוך G.

4. הוכיחו כי החבורות G ו-H אינן איזומורפיות. רמז: אחת פשוטה והשנייה לא.

בהצלחה!