תרגיל בית 10 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1.

א. נראה כיוון הפוך לטענה שראינו בכיתה: יהי M מודול מעל חוג מנה R/I. הוכיחו כי M הוא מודול מעל R לפי הפעולה $rm := (r+I)m$. בנוסף הוכיחו $I \subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$.

ב. יהי M הוא מודול מעל חוג R, ויהי $I \lhd R$ אידאל. הראו ש-IM הוא תת-מודול של M מעל R, וכי ${}^{M}/_{IM}$ יורש באופן טבעי מבנה של מודול מעל ${}^{R}/_{I}$.

שאלה 2. יהי R חוג חילופי, ויהי M מודול מעל R.

א. הוכיחו שאם M חופשי, אז $\operatorname{Ann}_R(M) = \{0_R\}$ ו-$\operatorname{Tor}(M) = \{0_M\}$.

ב. הוכיחו שאם כל אידאל $I \lhd R$ הוא חופשי כמודול מעל R, אז R הוא תחום ראשי.

שאלה 3. יהי R חוג ויהיו אידאלים שמאליים $L, L' \leq_l R$. בכיתה ראינו מסקנה לפיה אם R חילופי, אז $R/L \cong R/L'$ איזומורפיים כמודולים מעל R אם ורק אם $L = L'$.
הפריכו את המסקנה אם R אינו חילופי. רמז: אפשר לבחור $R = M_2(\mathbb{Q})$, $L = Re_{11}$ ו-$L' = Re_{22}$.

שאלה 4. יהי M מודול נוצר סופית ומפותל מעל תחום שלמות R. הוכיחו כי M לא נאמן.

שאלה 5. יהי R תחום ראשי, ותהינה מטריצות $A \in M_n(R)$ ו-$B \in M_m(R)$. נתבונן במטריצת הבלוקים

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{n+m}(R)$$

הוכיחו $M_{A \oplus B} \cong M_A \oplus M_B$ כמודולים מעל R.

שאלה 6. חשבו את הסדר של החבורה החיבורית

$$G = \left\langle a, b \;\middle|\; \begin{array}{rl} 88a + 20b & = 0 \\ -212a - 56b & = 0 \end{array} \right\rangle$$

שאלה 7. מצאו את הגורמים האינווריאנטים מעל החוג $\mathbb{Z}$ של המודול $M_A = \mathbb{Z}^3 / A \cdot \mathbb{Z}^3$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

שאלה 8. מצאו את הצורה האלכסונית הקנונית של המטריצה הבאה מעל $\mathbb{Z}[i]$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1+3i & 1+3i & 0 \\ 5+3i & 3+3i & 2 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!