

# פתרון תרגיל בית 9 בתורת החבורות

## 88-218 סמסטר א' תשע"ח

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 21.1.2018.

### שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שידועים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

**שאלה 1.** מצאו בעזרת משפט קיילי שיכון  $\varphi: U_8 \rightarrow S_4$  וכתבו אותו באופן מפורש. פתרו. אנחנו יודעים כי  $U_8 = \{1, 3, 5, 7\}$  לפי תרגיל בית 3. ניתן לכל איבר שם חדש

$$1 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2, \quad 5 \mapsto 3, \quad 7 \mapsto 4$$

ברור ש-1 נשלח ל- $\text{id} \in S_4$ . לשאר האיברים נעזר בטבלת הכפל שחישבנו בעבר, כדי לחשב לאן שאר האיברים נשלחים. למשל כפל משמאל ב-3 שולח את 1 ל-3 ולכן התמורה שאליה נשלח את 3 תעביר את 1 ל-2. חישוב סופי:

$$1 \mapsto \text{id}, \quad 3 \mapsto (12)(34), \quad 5 \mapsto (13)(24), \quad 7 \mapsto (14)(23)$$

**שאלה 2.** מצאו את הסדרים של כל תת-חבורות סילו של  $S_5$ . מי מהן אבליות? פתרו. ידוע לנו כי  $|S_5| = 5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ . לכן (כל) תת-חבורת 2-סילו של  $S_5$  היא מסדר 8, תת-חבורת 3-סילו היא מסדר 3, תת-חבורת 5-סילו היא מסדר 5 וכל השאר הן טריוויאליות. כל חבורה מסדר 3 או 5 היא ציקלית, ולכן אבלית. אנחנו יודעים שניתן לשכן את  $D_4$  ב- $S_4$ , ולכן גם ב- $S_5$ . מפני ש- $D_4$  היא מסדר 8, אז כל תת-חבורת 2-סילו של  $S_5$  איזומורפית ל- $D_4$ , שאינה אבלית.

### שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

**שאלה 3.** יהיו  $p \leq q$  ראשוניים (לאו דווקא שונים).

א. הוכיחו שכל חבורה מסדר  $pq^n$  עבור  $n \in \mathbb{N}$  אינה פשוטה.

ב. הוכיחו שגם חבורות מסדר 56 או 63 הן לא פשוטות. זה שונה מהסעיף הקודם.

ג. רשות (מאוד קשה!): תהי חבורה  $G$  מסדר  $p^a q^b$  עבור  $a, b \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי  $G$  אינה פשוטה לכמה שיותר זוגות אפשריים  $(a, b)$  שאתם מצליחים, שלא טיפלנו בהם עד כה בכיתה או בתרגיל.

רמז: התשובה היא לכל  $a, b$ . הוכחה לכך דורשת בדרך כלל כמה קורסים.

פתרון.

א. אם  $p = q$ , אז מדובר בחבורת- $p$  מסדר  $p^2$  לפחות. תהי  $G$  חבורה מסדר  $p^{n+1}$ . אם היא לא אבלית, אז נבחר  $N = Z(G)$  שידוע לנו שהיא נורמלית. נשים לב כי  $N \neq \{e\}$  לפי טענה מן ההרצאה, וגם  $N \neq G$ , כי  $G$  לא אבלית. אם  $G$  אבלית, אז נבחר איבר  $g \in G$  מסדר  $p$ , שקיים לפי קושי. תת-החבורה  $\langle g \rangle$  היא תת-חבורה נורמלית, כי  $G$  אבלית, והיא לא טריוויאלית כי היא מסדר  $p < p^{n+1}$ . כעת נניח  $p < q$ . לפי משפט סילו III נקבל כי  $n_q | p$  וגם  $n_q \equiv 1 \pmod{p}$ . מפני ש- $p < q$ , אז  $p \not\equiv 1 \pmod{q}$ . לכן בהכרח  $n_q = 1$  ולפי המסקנה ממשפטי סילו, זה אומר שיש תת-חבורה  $q$ -סילו נורמלית, והיא אינה טריוויאלית.

ב. נחשב  $63 = 3^2 \cdot 7$  ו- $56 = 2^3 \cdot 7$ . שימו לב שבמונחי הסעיף הקודם  $p > q$ . לפי משפט סילו III עבור חבורה מסדר 63 נקבל  $n_7 | 3^2$  ולכן  $n_7 \in \{1, 3, 9\}$ . האפשרות היחידה שבה  $n_7 \equiv 1 \pmod{7}$  היא  $n_7 = 1$  ולכן ישנה תת-חבורה 7-סילו נורמלית. באופן דומה בחבורה מסדר 56 נקבל  $n_7 | 2^3$  ולכן  $n_7 \in \{1, 2, 4, 8\}$ . אם  $n_7 = 1$ , סיימנו כמו מקודם. אחרת, בהכרח  $n_7 = 8$ . נזכר שתת-חבורות שונות מסדר ראשוני נחתכות טריוויאלית. אצלנו תת-חבורות 7-סילו הן מסדר ראשוני ולכן יש בדיוק  $8 = (7-1) \cdot 8$  איברים מסדר 7. נשארנו עם  $56 - 48 = 8$  שמונה איברים שיספיקו רק לתת-חבורת 2-סילו אחת, ולכן קיבלנו  $n_2 = 1$ . אגב, יש 12 חבורות מסדר 56 שבהן  $n_7 = 1$  ורק אחת שבה  $n_7 \neq 1$ .

ג. זו מסקנה מיידית של משפט ברנסייד.

**שאלה 4.** יהי  $p$  מספר ראשוני.

א. תהי  $G$  חבורה לא אבלית מסדר  $p^3$ . הוכיחו כי  $Z(G) = G'$ .

ב. תהי  $G$  חבורה סופית, ונניח  $|G| = p$ . הוכיחו שקיים  $z \in G$  מסדר  $p$  כך ש- $C_G(z)$  מכיל תת-חבורת  $p$ -סילו של  $G$ . רמז: בחרו איבר השייך למרכז של תת-חבורת  $p$ -סילו.

פתרון.

א. מפני ש- $G$  מסדר  $p^3$ , אז  $|Z(G)|$  מחלק את  $p^3$ . לא יתכן שהסדר הוא  $p^3$  כי  $G$  לא אבלית, ולא יתכן שהוא 1 כי  $G$  היא חבורת- $p$  סופית. אם  $|Z(G)| = p^2$ , אז מפני שהמרכז הוא נורמלי נקבל שחבורת המנה  $G/Z(G)$  מוגדרת, והיא מסדר  $p$ . לכן היא ציקלית, ולפי תרגיל שעשינו בכיתה נקבל כי  $G$  אבלית, שזו סתירה. לכן  $|Z(G)| = p$ . חבורת המנה  $G/Z(G)$  היא מסדר  $p^2$ , ולכן אבלית (שוב, לפי מה שראינו בהרצאה). לכן  $G' \leq Z(G)$ . אבל  $G$  לא אבלית, ולכן  $G' \neq \{e\}$ . כלומר  $|G'| = p$ , ומשיוויון מספר האיברים נקבל  $Z(G) = G'$ .

ב. תהי  $P \leq G$  תת-חבורת  $p$ -סילו. אזי  $P$  היא חבורת- $p$  לא טריוויאלית כי  $|G| = p$ . לכן יש לה מרכז לא טריוויאלי  $Z(P)$ . גם  $Z(P)$  היא חבורת- $p$ , ולפי משפט קושי קיים  $z \in Z(P)$  מסדר  $p$ . לפי הגדרת המרכז, לכל  $g \in P$  מתקיים כי  $gz = zg$  ולכן

$$P \subseteq \{g \in G \mid gz = zg\} = C_G(z)$$

כלומר האיבר  $z \in Z(P) \subseteq G$  הוא האיבר המבוקש.

**שאלה 5.** תהי חבורה  $G$  מסדר  $p^t m$ , כאשר  $p$  ראשוני,  $m > 1$  טבעי שזר ל- $p$  ו- $t \in \mathbb{N}$ .

א. נניח ש- $|G|$  לא מחלק את  $m!$  (ניתן להסתפק בכך ש- $|G|$  לא מחלק את  $n_p!$ ). הוכיחו כי  $G$  לא פשוטה. רמז: העידון של משפט קיילי.

ב. הוכיחו שחבורות מסדרים 36, 150 או 160 אינן פשוטות.

פתרון.

א. תהי  $P$  תת-חבורת  $p$ -סילו של  $G$ , ויהי  $N_G(P)$  המנרמל שלה. ראינו בכיתה כי  $n_p = [G : N_G(P)]$ , שהוא גם מספר תת-החבורות הצמודות ל- $P$ . אם  $G$  פשוטה, אז ההומומורפיזם

$$\varphi: G \rightarrow S_{n_p}$$

מהעידון של משפט קיילי הוא שיכון, כי  $\varphi$  אינו ההומומורפיזם הטריבויאלי והגרעין  $\ker \varphi$  הוא תת-חבורה נורמלית של  $G$ . לכן  $|\operatorname{im} \varphi| = |G|$  מחלק את  $n_p!$ . אבל לפי משפט סילו III אנחנו יודעים כי  $n_p | m$ , ולכן  $|G|$  מחלק גם את  $m!$ . זו סתירה לנתון, ולכן  $G$  אינה פשוטה.

ב. נחשב  $36 = 2^2 \cdot 3^2$ . נפעיל את הסעיף הקודם עם  $p = 2$ , ואכן  $4! \nmid 36$ . לכן אין חבורה פשוטה מסדר 36.  
נחשב  $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ . הפעם יש להפעיל את הסעיף הקודם עם  $p = 5$ , ואכן  $6! \nmid 150$ .  
לסיום, נחשב  $160 = 2^5 \cdot 5$ . נפעיל את הסעיף הקודם עם  $p = 2$ , ואכן  $5! \nmid 160$ .

**שאלה 6.** תהינה  $G, H$  חבורות.

א. הוכיחו כי  $\operatorname{Inn}(G) \times \operatorname{Inn}(H) \cong \operatorname{Inn}(G \times H)$

ב. הוכיחו כי  $\operatorname{Inn}(S_3) \cong S_3$  ומצאו אוטומורפיזם שאינו פנימי של החבורה  $S_3 \times S_3$ .  
רמז: נוח לחשוב על  $S_3 \times S_3$  כתת-חבורה של  $S_6$  ושם לחפש אוטומורפיזם.

פתרון.

א. ראינו שלכל חבורה  $G/Z(G) \cong \operatorname{Inn}(G)$ . נעזר בכך ש- $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$  (ודאו שאתם יודעים להוכיח את זה!) ולכן

$$\begin{aligned} \operatorname{Inn}(G \times H) &\cong (G \times H) / Z(G \times H) = (G \times H) / (Z(G) \times Z(H)) \\ &\cong (G/Z(G)) \times (H/Z(H)) \cong \operatorname{Inn}(G) \times \operatorname{Inn}(H) \end{aligned}$$

כאשר האיזומורפיזם בין השורות הוא מקרה פרטי של שאלה 3 בתרגיל בית 7.

ב. אנחנו יודעים כי  $Z(S_3) = \{\operatorname{id}\}$  לפי תרגיל שראינו בכיתה. לכן

$$\operatorname{Inn}(S_3) \cong S_3 / Z(S_3) = S_3 / \{\operatorname{id}\} \cong S_3$$

נסמן  $G = S_3 \times S_3$  ונבחר  $\varphi: G \rightarrow G$  להיות

$$\varphi(a, b) = (b, a)$$

אנחנו רוצים להראות כי  $\varphi \in \operatorname{Aut}(G) \setminus \operatorname{Inn}(G)$  (אגב ל- $G$  יש 36 אוטומורפיזמים לא פנימיים). קל לראות ש- $\varphi$  על. לכן  $\varphi$  חח"ע, כי  $G$  סופית. זה אכן ההומומורפיזם

$$\varphi(a_1, b_1)\varphi(a_2, b_2) = (b_1, a_1)(b_2, a_2) = (b_1 b_2, a_1 a_2) = \varphi(a_1 a_2, b_1 b_2)$$

למה הוא לא פנימי? אילו  $\varphi$  היה פנימי, אז היה איבר  $(a, b) \in G$  כך ש-

$$\begin{aligned} \varphi((12), (12)) &= (a, b)((12), (12))^{-1} = (a(12)a^{-1}, b(12)b^{-1}) \\ &= ((a(1), a(2)), (b(1), b(2))) = ((12), (12)) \end{aligned}$$

לכן  $a, b \in C_{S_3}((12)) = \{\operatorname{id}, (12)\}$  אם  $a = b = \operatorname{id}$ , אז  $\varphi = \operatorname{id}_G$  ונקבל

$$\varphi((12), (13)) = ((a(1), a(2)), (b(1), b(3))) = ((12), (13))$$

ששונה מ- $((13), (12))$ , כדרוש מהגדרת  $\varphi$ . אם  $b = (12)$  ו- $a \in \{\text{id}, (12)\}$ , אז

$$\varphi((12), (13)) = ((a(1), a(2)), (b(1), b(3))) = ((12), (23))$$

ששונה מ- $((13), (12))$ , כדרוש מהגדרת  $\varphi$ . אם  $a = (12)$  ו- $b \in \{\text{id}, (12)\}$ , אז

$$\varphi((13), (12)) = ((a(1), a(3)), (b(1), b(2))) = ((23), (12))$$

ששונה מ- $((12), (13))$ , כדרוש מהגדרת  $\varphi$ . לכן  $\varphi$  אינו אוטומורפיזם פנימי. אם חושבים על שיכון  $S_3 \times S_3 \rightarrow S_6$  שבו הרכיב הראשון הוא של תמורות המקבעות את  $\{4, 5, 6\}$  וברכיב השני תמורות המקבעות את  $\{1, 2, 3\}$ , אז  $\varphi$  שבחרנו הוא הצמדה בתמורה (36) (25) (14), ששייכת למנרמל של  $G$ -ב- $S_6$ , אבל לא ל- $G$ .

### שאלה 7. תהי $G$ חבורה.

א. הוכיחו כי  $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ . רמז: הראו כי  $\gamma_{\varphi(g)} = \varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1}$  לאיברים מתאימים.

ב. הוכיחו שאם  $Z(G) = \{e\}$ , אז  $C_{\text{Aut}(G)}(\text{Inn}(G)) = \{\text{id}\}$  ובפרט מתקיים  $Z(\text{Aut}(G)) = \{\text{id}\}$ .

פתרון.

א. נעזר ברמז כדי להראות ש- $\text{Inn}(G)$  סגורה להצמדה. יהי  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  ויהי  $\gamma_g \in \text{Inn}(G)$ . אז לכל  $x \in G$  מתקיים

$$\begin{aligned} \varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1}(x) &= \varphi(\gamma_g(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(g \cdot \varphi^{-1}(x) \cdot g^{-1}) = \varphi(g \cdot \varphi^{-1}(x) \cdot g^{-1}) \\ &= \varphi(g) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) \cdot x \cdot \varphi(g)^{-1} = \gamma_{\varphi(g)}(x) \end{aligned}$$

ולכן  $\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1} = \gamma_{\varphi(g)} \in \text{Inn}(G)$ .

ב. יהי  $\varphi \in C_{\text{Aut}(G)}(\text{Inn}(G))$ , ונרצה להראות כי  $\varphi = \text{id}$ . לפי הגדרה  $\varphi$  מתחלף עם כל אוטומורפיזם פנימי. כלומר  $\varphi \circ \gamma_g = \gamma_g \circ \varphi$  לכל  $g \in G$ . נכפיל ב- $\varphi^{-1}$  מימין ובעזרת הרמז מהסעיף הקודם נקבל

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi(g)} &= \varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1} = \gamma_g \\ \gamma_g^{-1} \gamma_{\varphi(g)} &= \text{id} \end{aligned}$$

ראינו בכיתה כי  $\gamma_g^{-1} = \gamma_{g^{-1}}$  ולכן  $\gamma_{g^{-1}} \gamma_{\varphi(g)} = \text{id}$ . כלומר לכל  $x \in G$  מתקיים

$$\begin{aligned} \gamma_{g^{-1}\varphi(g)}(x) &= \text{id}(x) \\ g^{-1}\varphi(g)x(g^{-1}\varphi(g))^{-1} &= x \\ g^{-1}\varphi(g)x &= xg^{-1}\varphi(g) \end{aligned}$$

לכן  $g^{-1}\varphi(g) \in Z(G)$ , אך  $Z(G)$  חסרת מרכז לפי הנתון, ולכן  $g^{-1}\varphi(g) = e$ . כלומר  $\varphi(g) = g$  לכל  $g \in G$ , או במילים אחרות  $\varphi = \text{id}$ , כדרוש. לסיים, המְרָקֵז של חבורה הוא חיתוך כל המְרָקֵזים, ולכן מוכל בכל אחד מהם. כלומר  $Z(\text{Aut}(G)) = \{\text{id}\}$  ולכן גם  $Z(\text{Aut}(G)) \subseteq C_{\text{Aut}(G)}(\text{Inn}(G)) = \{\text{id}\}$ .

### שאלה 8. תהי $G$ חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה המוכלת ממש ב- $G$ .

א. הוכיחו שאם  $G$  סופית, אז גם האיחוד  $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$  מוכל ממש ב- $G$ . רמז: העזרו באינדקס של המנרמל.

ב. כעת לא נניח ש- $G$  סופית, אבל שהאינדקס  $[G : H] < \infty$  עדין סופי. הוכיחו שהסעיף הקודם עדין נכון. רמז:  $H$  מכילה תת-חבורה נורמלית וקצת משפטי האיזומורפיזם.

פתרון.

א. מספר תת-החבורות הצמודות ל- $H$  ב- $G$  שווה לאינדקס של המנרמל  $[G : N_G(H)]$ . נסמן  $|G| = n$  ו- $[G : H] = m$ . מפני ש- $H \subseteq N_G(H)$ , אז  $[G : N_G(H)] \leq m$ . בהרצאה ראינו כי  $|gHg^{-1}| = |H|$  לכל  $g \in G$ . מפני שכל תת-חבורה הצמודה ל- $H$  מכילה את איבר היחידה, אז נוכל לחסום את גודל האיחוד

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| &\leq 1 + [G : N_G(H)] (|H| - 1) \leq 1 + m (|H| - 1) \\ &= 1 + m \left( \frac{n}{m} - 1 \right) = n - (m - 1) < n = |G| \end{aligned}$$

כשאי-השיויון האחרון מסתמך על כך ש- $H$  מוכלת ממש ב- $G$  ולכן  $m > 1$ .

ב. ראינו בכיתה שאם  $H$  מאינדקס סופי, אז קיימת  $N \leq H$  תת-חבורה נורמלית של  $G$  שגם היא מאינדקס סופי. בפרט  $G/N$  חבורה סופית. תהי  $\pi: G \rightarrow G/N$  ההטלה הטבעית, שהיא אפימורפיזם. לפי משפט האיזומורפיזם הרביעי, כל תת-חבורות של  $G/N$  הן מן הצורה  $K/N$  בהתאמה לתת-חבורות  $K \leq G$  המכילות את  $N$ . לכן  $H/N$  תת-חבורה המוכלת ממש ב- $G/N$  (כי  $H$  מוכלת ממש ב- $G$ ). נוכל להפעיל את הסעיף הקודם על החבורה  $G/N$  לגבי תת-חבורה  $H/N$  ונקבל שאיחוד כל תת-חבורות הצמודות ל- $H/N$  מוכל ממש ב- $G/N$ . אבל כל תת-חבורות הצמודות ל- $H$  ב- $G$  הן תמונה הפוכה של  $\pi$  של תת-חבורות הצמודות ל- $H/N$  ב- $G/N$ . לכן האיחוד  $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$  הוא התמונה ההפוכה של תת-קבוצה המוכלת ממש ב- $G/N$  ומכאן שהוא מוכל ממש ב- $G$  (הרי  $\pi(G) = G/N$ ).

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

**שאלה 9.** נראה שישנן חבורות שבהן תת-חבורת הקומוטטור מכילה איברים שאינם קומוטטורים.

א. נסמן  $G = GL_2(\mathbb{R})$ . הוכיחו  $G' \subseteq SL_2(\mathbb{R})$  (למעשה יש שיויון) וכי  $-I_2 \in G'$ .

ב. אתגר: הוכיחו כי  $-I_2 \in G'$  הוא קומוטטור של איברי  $G$ , אבל לא של איברי  $G'$ . נסו להציג אותו כמכפלה של קומוטטורים של  $G'$ . רמז: הבינו מה היא העקבה של קומוטטור.

ג. תהי  $H$  חבורה שבה  $|H'| < [H : Z(H)]^2$ . הוכיחו כי  $H'$  מכילה איברים שאינם קומוטטורים. רמז: קודם הראו ש- $[a, b] = [ay, bz]$  לכל  $a, b \in H$  ו- $y, z \in Z(H)$ . הערה: לכל  $p$  קיימות חבורות  $p$ -מטא-אבליות שמקיימות את התנאי הזה.

בהצלחה!