תרגיל 5

- תאריכי הגשה: הקבוצה של יום שלישי – 30/11. יום רביעי – 01/12. יום חמישי – 02/12.
- נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצת תרגול.
- ההגשה היא רק לקבוצות שאתם רשומים אליהן! תרגילים שיוגשו לקבוצות אחרות לא יבדקו.

1. תהי G חבורה, H_1,H_2 ת"ח של G. כמו כן נתון כי $H_1 \lhd G$.
   א. הוכח או הפרך: H_1H_2 תת-חבורה של G.
   ב. הוכח או הפרך: H_1H_2 תת-חבורה נורמלית של G.
   ג. נתון כי גם $H_2 \lhd G$. הוכח או הפרך: H_1H_2 תת-חבורה נורמלית של G.
   ד. נתון כי גם $H_2 \lhd G$. הוכח או הפרך: $H_1 \cap H_2$ תת-חבורה נורמלית של G.

2. א. תהי G חבורה, $H \le G$. הראו כי לכל $g \in G$, gHg^{-1} היא תת-חבורה של G האיזומורפית ל-H.
   ב. הסיקו מסעיף א' כי אם G חבורה עם תת-חבורה H יחידה מסדר n אז $H \lhd G$.

3. א. יהי $\varphi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם של חבורות. הוכיחו כי לכל $g \in G_1$ הסדר של $\varphi(g)$ מחלק את הסדר של g.
   ב. יהי $\varphi : G_1 \to G_2$ אפימורפיזם (הומומורפיזם על) של חבורות. הוכיחו כי אם ל-G_2 יש איבר מסדר n אז גם ל-G_1 יש איבר מסדר n.
   ג. הוכיחו שאפימורפיזם בין שתי חבורות ציקליות מעביר יוצר ליוצר.

4. תהי $Q_8 = \{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י:
   $ijk = k^2 = j^2 = i^2 = -1$. שימו לב כי מרומז משמות האיברים כי $(-1)i = -i$, $(-1)j = -j$, $(-i)(-j) = ij$ וכו'. מנתונים אלו ניתן להשלים את לוח הכפל המלא של החבורה; אינכם נדרשים לצרף זאת בפתרון התרגיל, אך מומלץ מאוד להבין את הפעולה בחבורה זו לפני שפותרים את השאלה. למשל, למה שוות המכפלות ij, ik, jk, ji, ki, kj? חבורה זו נקראת **חבורת הקווטרניונים**.
   א. מצאו את כל תת-החבורות של Q_8.
   ב. הוכיחו שכל תת-חבורה של Q_8 היא תת-חבורה נורמלית. (רמז: בדקו את האינדקס של תת-החבורות)
   ג. הוכיחו ש-Q_8 אינה איזומורפית ל-D_4.

5. הוכיחו שהמיפויים הבאים הם הומומורפיזמים ומצאו אם הם חח"ע ו/או על:
   א. $f : (\mathbb{C}^*,\cdot) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$ המוגדר ע"י $f(x) = x^5$
   ב. $f : (\mathbb{Q}^*,\cdot) \to (\mathbb{Q}^*,\cdot)$ המוגדר ע"י $f(x) = x^5$

ג. $f: Z_6 \to G$, כש - $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in Z_3 \right\}$, וההומומורפיזם הוא:

$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & a(\bmod 3) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. א. הראו ש- $\{\sigma \in S_5 : \sigma(2) = 2\}$ היא תת-חבורה של S_5.

ב. האם היא תת-חבורה נורמלית של S_5?

7. הגדרה: חבורה G היא פשוטה אם אין לה תת-חבורות נורמליות לא-טריוואליות. נתון ש- $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots G_n \subseteq \cdots$ חבורות פשוטות. הוכיחו שגם $G = \bigcup_n G_n$ פשוטה.