תרגיל בית 7 - מופשטת 1

שאלה 1

א. מצאו גודל של מחלקת צמידות $[\beta]=\{g^{-1}\beta g: \quad g\in S_{15}\}$ של האיבר $\beta=(3,2,6,9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת הצמדה).

ב. תהי $H\le S_9$ תת חבורה הנוצרת על ידי $(123)(789)$ ו-(345). נניח ש-H פועלת (הפעולה הטבעית) על $X=\{1,2,3,\dots,9\}$. כמה מסלולים יש לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

שאלה 2

א. תהא G חבורה ונתון שקיים $1\ne g\in G$ כך שמחלקת הצמידות שלו מכילה שני איברים. הוכיחו שקיימת ב-G תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

ב. תהא $G=S_4$ הפועלת על הקבוצה $X=\{1,2,3,4\}$ ע"י $g*x=g(x)$. חשבו את המייצב של $x=2$. האם המייצב של $x=2$ הוא ת"ח נורמלית של G? נמקו.

שאלה 3

תנו דוגמה לפעולה נאמנה של חבורה לא טריוויאלית G על קבוצה X עם איבר $x\in X$ כך ש-$Stab(x)=G_x=G$. תזכורת: פעולה היא נאמנה אם רק איבר היחידה פועל באופן טריוויאלי.

שאלה 4

תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל $1\ne x\in G$, x אינו צמוד להופכי שלו.

שאלה 5

א. נניח ש- G היא חבורת מסדר p^k עבור p ראשוני ו- $k \geq 1$, וש- G פועלת על קבוצה עם n איברים כש- p לא מחלק את n. הוכיחו שקיימת נקודת שבת משותפת.

ב. הוכיחו או הפריכו: בהינתן חבורה G הפועלת על קבוצה X כך ש- $|G|=|X|=13$, בהכרח קיימת לפעולה נקודת שבת.

שאלה 6

א. מצאו בכמה דרכים <u>שונות</u>, עד כדי הסימטריה של הריבוע, ניתן לצבוע קודקודים של ריבוע, כאשר כל קודקוד ניתן לצבוע באחד משלושה צבעים שונים. (שימו לב: שתי צביעות יחשבו זהות אם ניתן להגיע מאחת לשניה באמצעות סיבובים ו/או שיקופים.)

ב. מצאו כמה לוחות משבצות 3×3 לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע כל משבצת באחד משני צבעים שונים.

שאלה 7

א. השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_9 כתת חבורה של S_6.

ב. תהי G חבורה אינסופית פשוטה, ותהי H תת חבורה אמיתית של G. הוכיחו ש- $[G:H]=\infty$.

[<u>רמז</u>: עידון של משפט קיילי.]

בהצלחה!