תרגיל בית 12 אינפי 3- לא להגשה

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$ כאשר $D=[0,1]\times[0,1]$

פתרון.

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left.\frac{x^3}{(1+y^2)}\right|_0^1 dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{(1+y^2)}dy = \frac{1}{3}\left.\arctan y\right|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

(ב) $\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2}dxdy$ כאשר $D=[3,4]\times[1,2]$

פתרון.

$$\int_1^2\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}dxdy = \int_1^2 -\left.\frac{1}{x+y}\right|_3^4 dy = \int_1^2 (-\frac{1}{4+y}+\frac{1}{3+y})dy =$$

$$-\ln(y+4)+\ln(y+3)|_1^2 = -\ln 6+\ln 5+\ln 5-\ln 4 = \ln\frac{25}{24}$$

(ג) $\int_0^1\int_x^1 \sin(y^2)dydx$.

פתרון.

$$\int_0^1\int_x^1 \sin(y^2)dydx = \int_0^1\int_0^y \sin(y^2)dxdy = \int_0^1 \sin(y^2)x|_0^y dy = \int_0^1 y\sin y^2 dy \underset{\substack{t=y^2\\dt=2ydy}}{=}$$

$$= \int_0^1 \sin t dt = -\cos t|_0^1 = 1$$

(ד) $\int_0^\pi\int_0^1 x^{2n-1}\cos(x^n y)dxdy$

פתרון.

$$\int_0^\pi\int_0^1 x^{2n-1}\cos(x^n y)dxdy = \int_0^1\int_0^\pi x^{2n-1}\cos(x^n y)dydx = \int_0^1 x^{n-1}\sin(x^n y)|_0^\pi dx$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}\sin(\pi x^n)dx \underset{\substack{t=x^n\\dt=nx^{n-1}dx}}{=} \frac{1}{n}\int_0^1 \sin\pi t dt = -\frac{1}{\pi n}\cos\pi t\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi n}$$

(ה) $\iint\limits_D \sin^7 x \cdot e^{\sqrt{y}} dxdy$ כאשר D הוא המשולש שקודקודיו הם $(0,1), (1,0), (-1,0)$.

פתרון.

$$\iint\limits_D \sin^7 x \cdot e^{\sqrt{y}} dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_{y-1}^{1-y} \sin^7 x \cdot e^{\sqrt{y}} dxdy$$

נשים לב שהפונקציה

$$F(y) = \int\limits_{y-1}^{1-y} \sin^7 x \cdot e^{\sqrt{y}} dx$$

שווה זהותית ל 0 כי לכל $y \in [0,1]$ הפונקציה $\sin^7 x \cdot e^{\sqrt{y}}$ היא אי זוגית על הקטע הסימטרי $[y-1, 1-y]$. ולכן גם האינטגרל הכפול שווה 0.

(ו) $\int\limits_0^4 \int\limits_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{1+x^6} dxdy$

פתרון.

$$\int\limits_0^4 \int\limits_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{1+x^6} dxdy = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{x^2} \frac{1}{1+x^6} dydx = \int\limits_0^2 \frac{1}{1+x^6} y\Big|_0^{x^2} dx =$$

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2}{1+x^6} dx \underset{\substack{t=x^3 \\ dt=3x^2dx}}{=} \frac{1}{3}\int\limits_0^8 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{3}\arctan t\Big|_0^8 = \frac{1}{3}\arctan 8$$

(ז) $\iint\limits_D \frac{1}{x} dxdy$ כאשר $D = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2, \quad x^2 \le y \le x^3\}$

פתרון.

$$\iint\limits_D \frac{1}{x} dxdy = \int\limits_1^2 \int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{1}{x} dydx = \int\limits_1^2 \frac{y}{x}\Big|_{x^2}^{x^3} dx = \int\limits_1^2 (x^2 - x) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

(ח) $\int\limits_0^{\ln 2} \int\limits_0^{\sqrt{z}} \int\limits_0^{2x} e^{x^2} dydxdz$

פתרון.

$$\int_0^{\ln 2}\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2x} e^{x^2}dydxdz = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\sqrt{z}} e^{x^2}y\Big|_0^{2x}dxdz = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\sqrt{z}} 2xe^{x^2}dxdz \underset{\substack{t=x^2\\ dt=2xdx}}{=}$$

$$\int_0^{\ln 2}\int_0^{z} e^t dt = \int_0^{\ln 2} e^t\Big|_0^z dz = \int_0^{\ln 2}(e^z-1)dz = e^z - z\Big|_0^{\ln 2} = 2-\ln 2 - 1 = 1-\ln 2$$

(ט) $\displaystyle\int_0^1\int_1^{e^z}\int_{\frac{1}{y}}^1 \ln x dxdydz$

פתרון.

$$\int_0^1\int_1^{e^z}\int_{\frac{1}{y}}^1 \ln x dxdydz = \int_0^1\int_1^{e^z}(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{y}}^1 dydz = \int_0^1\int_1^{e^z}(-1+\frac{1}{y}\ln y + \frac{1}{y})dydz =$$

$$-\int_0^1\int_1^{e^z}dydz + \int_0^1\int_1^{e^z}\frac{1}{y}(\ln y+1)dydz$$

החלק הראשון:

$$-\int_0^1\int_1^{e^z}dydz = -\int_0^1(e^z-1)dz = -e^z+z\Big|_0^1 = 2-e$$

החלק השני:

$$\int_0^1\int_1^{e^z}\frac{1}{y}(\ln y+1)dydz \underset{\substack{t=\ln y\\ dt=\frac{1}{y}dy}}{=} \int_0^1\int_0^z (t+1)dtdz = \int_0^1(\frac{1}{2}t^2+t)\Big|_0^z dz =$$

$$\int_0^1(\frac{1}{2}z^2+z)dz = \frac{1}{6}z^3+\frac{1}{2}z^2\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

ביחד מתקבל

$$\frac{8}{3}-e$$

2. החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים (עבור $f(x,y)$ רציפה).

(א) $\displaystyle\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

פתרון.

$$\int_0^1\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$$

ב) $\int_0^1 \int_0^{2x^2} f(x,y)dydx + \int_1^5 \int_0^{\sqrt{5-x}} f(x,y)dydx$

פתרון.

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{5-y^2} f(x,y)dydx$$

ג) $\int_{-1}^1 \int_{x^3}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dydx$

פתרון.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dxdy$$

3. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ $\quad D = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2, \quad x \ge 0\}$

פתרון.

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \quad D = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2, \quad x \ge 0\}$$

יש כאן כל מיני x^2+y^2 אז סביר לנסות הצבה פולארית $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.

נקבל שהתחום הוא

$$r^4 \le r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$r^2 \le \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

זה אומר שהתחום שלנו עבור θ הוא $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ כי מחוץ לתחום הזה $\cos^2\theta - \sin^2\theta < 0$ (נשים לב שאנחנו עובדים רק איפה ש $x \ge 0$)

ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}} r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \underset{\substack{t=r^2\\dt=2rdr}}{=} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \frac{1}{2}\sqrt{1-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})\ (1-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \mathrm{d}\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}(1-\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|+\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta$$

עכשיו

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta = -\frac{2\sqrt{8}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

נזכור ש

$$\int \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \int \sin\theta(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta \underset{\substack{t=\cos\theta\\dt=-\sin\theta d\theta}}{=} -\int(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3-t = \frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta$$

ולכן

$$-\frac{2\sqrt{8}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{2\sqrt{8}}{3}\ (\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2\sqrt{8}}{3}(\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}+1)$$

$$= -\frac{2}{9}+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}\sqrt{8} = \frac{10}{9}-\frac{4}{9}\sqrt{8}$$

האינטגרל שנשאר הוא:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}$$

כלומר התוצאה הסופית היא:

$$\frac{10}{9}-\frac{4}{9}\sqrt{8}+\frac{\pi}{6}$$

ב) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le Rx\}$

פתרון.

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le Rx\}$$

נניח ש $R>0$ (אם $R<0$ הפתרון סימטרי ושווה).

גם כאן נראה סביר לנסות קואורדינטות פולריות

נקבל שהתחום הוא

$$r^2 \le Rr\cos\theta$$

כלומר

$$r \le R\cos\theta$$

כמובן שזה אפשרי רק כאשר $\cos\theta \ge 0$ כלומר כאשר $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. ולכן האינטגרל שלנו הוא

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\left.(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}R^3\mathrm{d}\theta$$

האינטגרל השמאלי הוא:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

את זה כבר חישבנו בשאלה הקודמת. מתקבל:

$$-\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}R^3\left.\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{9}R^3$$

האינטגרל הימני הוא:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}R^3\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}R^3$$

ולכן בסך הכל מתקבל

$$\frac{\pi}{3}R^3 - \frac{4}{9}R^3$$

ג) $\iiint\limits_D xdxdydz \quad D=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1, \quad z\ge 0\}$

פתרון.

$$\iiint\limits_D xdxdydz \quad D=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1, \quad z\ge 0\}$$

שיטה א': x היא פונקציה אי זוגית והתחום הרלוונטי הוא סימטרי ביחס ל x ולכן האינטגרל הוא 0.

שיטה ב':

נניח ש $a,b,c > 0$ (אחרת צריך להיות במקומות המתאימים $-a,-b,-c$ והפתרון דומה)

נבצע החלפת משתנים

$$u=\frac{x}{a}, \quad v=\frac{y}{b}, \quad w=\frac{z}{c}$$

המטריצה של החלפת המשתנים היא:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

והדטרמיננטה היא: $\frac{1}{abc}$.

לכן

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{1}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

כלומר:

$$\iiint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{D'} au(abc)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=a^2bc\iiint\limits_{D'} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

כאשר

$$D'=\{(x,y,z)\mid u^2+v^2+w^2\le 1, \quad w\ge 0\}$$

כעת נשתמש בהחלפת קואורדינטות כדוריות ונקבל:

$$a^2bc\iiint\limits_{D'} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=a^2bc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}(r^2\sin\varphi)(r\cos\theta\sin\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=a^2bc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}(r^3\sin^2\varphi\cos\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a^2bc}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0$$

ד) $\iiint\limits_D (x+y+z)dxdydz$ $D=\{(x,y,z) \mid \sqrt{y^2+z^2} \le x \le \sqrt{4-y^2-z^2}\}$

פתרון.

$$\iiint\limits_D (x+y+z)dxdydz \quad D=\{(x,y,z) \mid \sqrt{y^2+z^2} \le x \le \sqrt{4-y^2-z^2}\}$$

מהתחום מתבקש להשתמש בקואורדינטות גליליות

$$x=x, \quad y=r\cos\theta, \quad z=r\sin\theta$$

ואז התחום הוא:

$$r \le x \le \sqrt{4-r^2}$$

כמו כן, r מוגבל להיות בין 0 ל $\sqrt{2}$ (כי צריך ש $r \le \sqrt{4-r^2}$) ו θ חופשי, כלומר בין 0 ל 2π.

לכן האינטגרל הוא

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_D (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} \int\limits_0^{2\pi} r(x+r\cos\theta+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}r = \\
&= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} (rx\theta+r\sin\theta-r\cos\theta)\Big|_0^{2\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}r = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} 2\pi rx\mathrm{d}x\mathrm{d}r \\
&= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \pi rx^2\Big|_r^{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}r = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} (r(4-r^2)-r^3)\mathrm{d}r = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} (4r-2r^3)\mathrm{d}r \\
&= \pi(2r^2-\frac{1}{2}r^4)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi-2\pi = 2\pi
\end{aligned}$$

ה) $\iiint\limits_D (x+y+z)^2dxdydz$ $D=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 3, \quad x^2+y^2 \le 2z\}$

פתרון.

$$\iiint\limits_D (x+y+z)^2dxdydz \quad D=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 3, \quad x^2+y^2 \le 2z\}$$

התחימה $x^2+y^2+z^2 \le 3$ גורמת לחשוב על קואורדינטות כדוריות, אבל $x^2+y^2 \le 2z$ לא מתאים לזה כל כך. אז ננסה גליליות.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

ואז התחום הופך להיות $r \leq \sqrt{3-z^2}$ ו $r \leq \sqrt{2z}$

התנאים האלה נפגשים כאשר

$$\sqrt{2z} = \sqrt{3-z^2}$$

$$2z = 3 - z^2$$

$$z^2 + 2z - 3 = 0$$

כלומר

$$z = 1$$

(נשים לב שהדרישה $x^2+y^2 \leq 2z$ מחייבת $z > 0$)

כמו כן התנאי $x^2+y^2+z^2 \leq 3$ נותן את המגבלה $z \leq \sqrt{3}$.

קיבלנו שבתחום $0 \leq z \leq 1$ r יכול להיות בתחום $[0,\sqrt{2z}]$ובתחום $1 \leq z \leq \sqrt{3}$ r יכול להיות בתחום $[0,\sqrt{3-z^2}]$.

נביט על האינטגרל:

$$\iiint\limits_D (x+y+z)^2 dxdydz = \iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)dxdydz$$

נשים לב שהביטויים xy, xz הם אי זוגיים (ביחס ל x) והתחום הוא סימטרי ביחס ל x ולכן האינטגרל שלהם הוא 0.

בדומה, הביטוי yz הוא אי זוגי ביחס ל y בעוד שהתחום סימטרי ביחס ל y.

לכן נותרנו עם האינטגרל

$$\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

אם נבצע את המעבר לקואורדינטת גליליות נקבל

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{2z}} \int\limits_0^{2\pi} r(r^2+z^2)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z + \int\limits_1^{\sqrt{3}} \int\limits_0^{\sqrt{3-z^2}} \int\limits_0^{2\pi} r(r^2+z^2)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi(\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{2z}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z + \int\limits_1^{\sqrt{3}} \int\limits_0^{\sqrt{3-z^2}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z)$$

נחשב ראשית

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2z}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_0^1 (\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2z^2)\Big|_0^{\sqrt{2z}} \mathrm{d}z = \int_0^1 z^2+z^3\mathrm{d}z = \frac{7}{12}$$

ו

$$\int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-z^2}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_0^1 (\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2z^2)\Big|_0^{\sqrt{3-z^2}} \mathrm{d}z = \int_0^1 (\frac{1}{4}(3-z^2)^2 + \frac{1}{2}(3-z^2)z^2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{4}(9-6z^2+z^4) + \frac{1}{2}(3z^2-z^4))\mathrm{d}z = \int_0^1 (\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{z}^4)\mathrm{d}z = \frac{9}{4} - \frac{1}{20} = \frac{44}{20}$$

ולכן התוצאה הסופית היא:

$$2\pi(\frac{44}{20} + \frac{7}{12}) = \frac{167}{30}\pi$$

(ו) $\iiint_D dxdydz \quad D = \{(x,y,z) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4-z^2\}$

פתרון.

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad D = \{(x,y,z) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4-z^2\}$$

נשתמש בקוארדינטות גליליות ונקבל שהתחום הוא:

$$1 \le r \le \sqrt{4-z^2}$$

זה גם מגביל את z להיות בתחום $[0,\sqrt{3}]$ ולכן האינטגרל הוא:

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \pi \int_0^{\sqrt{3}} r^2\Big|_1^{\sqrt{4-z^2}} \mathrm{d}z$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4-z^2-1)\mathrm{d}z = \pi\ (3z - \frac{1}{3}z^3)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi(3\sqrt{3}-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\pi$$

(ז) $\iiint_D dxdydz \quad D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

פתרון.

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$

אם נעבור לקואורדינטות גליליות נקבל שהתחום הוא:

$$r \le \sqrt{z^2}, \quad r \le \sqrt{1-z^2}$$

וזה בהכרח אומר ש $z \in [-1,1]$ (כי אחרת $1-z^2 < 0$). נקודת החיתוך

$$\sqrt{z^2} = \sqrt{1-z^2}$$

היא כאשר $z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. כלומר, כאשר z נמצא בתחום $-\sqrt{\frac{1}{2}} \le z \le \sqrt{\frac{1}{2}}$ נקבל ש r נמצא בתחום $0 \le r \le \sqrt{z^2}$ ואם $\sqrt{\frac{1}{2}} \le |z| \le 1$ אז r נמצא בתחום $0 \le r \le \sqrt{1-z^2}$.

נניח שאנו מסתכלים על התחום שבו $z \ge 0$ (כי המצב בתחום השני סימטרי).

נקבל שהאינטגרל שצריך לחשב הוא:

$$\iiint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_0^z\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z + \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_0^z r\mathrm{d}r\mathrm{d}z + 2\pi\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

אחד האינטגרלים הוא:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_0^z r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^z \mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2}z^2\mathrm{d}z = \frac{1}{6}z^3\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{6\sqrt{8}}$$

והשני הוא:

$$\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}z = \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \frac{1}{2}(1-z^2)\mathrm{d}z = \frac{z}{2} - \frac{1}{6}z^3\Big|_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{8}} = \frac{1}{3} - \frac{5}{12\sqrt{2}}$$

בסך הכל יתקבל

$$2\pi(\frac{1}{6\sqrt{8}} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12\sqrt{2}}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

בגלל שחישבנו הכל רק עבור $z \ge 0$ צריך להכפיל את התוצאה ב 2 ונקבל:

$$\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ח) $\iint\limits_D ye^{x^3}dxdy \quad D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}$

$$\iint\limits_D ye^{x^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}$$

חישוב פשוט של האינטגרל נותן:

$$\iint\limits_D ye^{x^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\int\limits_0^x ye^{x^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{2}x^2e^{x^3}\mathrm{d}x=\left.\frac{1}{6}e^{x^3}\right|_0^1=\frac{1}{6}e$$

ט) $\iint\limits_D xye^{x^2-y^2}dxdy \quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 4,\quad 0\le y,\quad 1\le x^2-y^2\le 9\}$

פתרון.

$$\iint\limits_D xye^{x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 4,\quad 0\le y,\quad 1\le x^2-y^2\le 9\}$$

נראה סביר לבצע החלפת משתנים

$$u=x,\quad v=x^2-y^2$$

ראשית נסביר למה זו פונקציה חד חד ערכית. אם נבחר u,v מסוימים נקבל בהכרח ש $u=x$ ו $y^2=x^2-v$, בגלל ש $y\ge 0$ זה מחייב $y=\sqrt{x^2-v}$.
כלומר זאת אכן פונקציה חד חד ערכית.

התרגום של התנאים לu,v הוא:

$$0\le u\le 4,\quad 1\le v\le 9,\quad u^2-v\ge 0$$

נחשב את התשלום של החלפת המשתנים

$$\left|det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2x & -2y\end{pmatrix}\right|=2y$$

לכן

$$y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

לכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D xe^{x^2-y^2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_1^9\int\limits_0^{\sqrt{v}}ue^v\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int\limits_1^9 ve^v\mathrm{d}v=$$

$$\frac{1}{2}(\left.ve^v\right|_1^9-\int\limits_1^9 e^v\mathrm{d}v)=\frac{1}{2}(9e^9-e-e^9+e)=4e^9$$

י) $\iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dxdy$ $D=\{(x,y) \mid x^3 \le y \le 4x^3, \quad \frac{1}{2} \le x+y \le 1\}$

פתרון.

$$\iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D=\{(x,y) \mid x^3 \le y \le 4x^3, \quad \frac{1}{2} \le x+y \le 1\}$$

נראה מבטיח לבצע החלפה

$$u = x+y, \quad v = \frac{y}{x^3}$$

החלק הכי קשה זה להוכיח שזאת פונקציה חד חד ערכית. נניח ש u,v מספרים כלשהם כך ש $\frac{1}{2} \le u \le 1$ ו $1 \le v \le 4$ אז x,y שיתאימו להם צריכים לקיים ש

$$y = vx^3$$

ולכן

$$u = x + vx^3$$

כמה x יכולים לפתור את המשוואה הזאת? אם נגזור נקבל

$$vx^2 + 1 > 0$$

ולכן אין לפונקציה נקודות קיצון. זה אומר שהיא חותכת את 0 רק במקום אחד ולכן יש רק פתרון אחד למשוואה.

ממילא יש רק y אחד מתאים כי $y = u - x$.

כעת נחשב את התשלום להחלפת המשתנים

$$\left| det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3\frac{y}{x^4} & \frac{1}{x^3} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{x^3} + 3\frac{y}{x^4} = \frac{x+3y}{x^4}$$

כלומר

$$\frac{x+3y}{x^4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x^3}} \frac{x+3y}{x^4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^v \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^4 e^v \mathrm{d}v = \frac{1}{2}(e^4 - e)$$

יא) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{2x^2e^{x^2}}{x^2+y^2}dxdy \quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le x\}$

$$\iint\limits_D \frac{2x^2e^{x^2}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le x\}$$

נבצע החלפת משתנים

$$u=x^2,\quad v=\frac{y}{x}$$

בגלל ש $0\le x,y$ קל לראות שזו פונקציה חד חד ערכית (אם נבחר u,v מסוימים נקבל ש $x=\sqrt{u}$ ו $y=vx$)

נחשב את התשלום

$$\left|det\begin{pmatrix}2x & 0\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{pmatrix}\right|=2$$

ולכן

$$2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

לכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D \frac{x^2e^{x^2}}{x^2+y^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{e^{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^4\frac{e^u}{1+v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^1\frac{e^4-1}{1+v^2}\mathrm{d}v=(e^4-1)\arctan v|_0^1=\frac{\pi}{4}(e^4-1)$$

יב) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}dxdy \quad D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\}$

$$\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\}$$

נבצע החלפת משתנים

$$u=\sqrt{x},\quad v=\sqrt{y}$$

ברור שההחלפה חד חד ערכית. נחשב את התשלום:

$$\left|det\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{x}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}}\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{4\sqrt{xy}}$$

כלומר

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

לכן האינטגרל הוא

$$\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\{0\le u+v\le 1\}} \sqrt{u+v}4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 4\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-v}\sqrt{u+v}uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\underset{\substack{t=u+v\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}u}}{=} 4\int\limits_0^1\int\limits_v^1\sqrt{t}(t-v)v\mathrm{d}t\mathrm{d}v = 4\int\limits_0^1 \left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}vt^{\frac{3}{2}})\right|_v^1\mathrm{d}v$$

$$= 4\int\limits_0^1(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}v-\frac{2}{5}v^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}v^{\frac{5}{2}})\mathrm{d}v = 4(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{4}{35}+\frac{4}{15}) = \frac{92}{105}$$