

אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 4

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

שאלה 1

יהי $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ עם פעולות הכפל והחיבור של מטריצות.

א. הראו ש S הוא תת חוג של $M_2(\mathbb{R})$.

ב. הוכיחו כי $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}$ אידיאל בחוג S .

ג. הראו שחוג המנה S/I איזומורפי לחוג \mathbb{R} (בפעולות הרגילות).

שאלה 2

יהי R חוג ויהי I אידיאל של R הוכיחו כי $M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$.

שאלה 3

יהי $f: R \rightarrow S$ הומומורפיזם של חוגים קומוטטיביים ויהי $I \triangleleft S$ ראשוני. הוכח כי $f^{-1}(I)$ ראשוני.

שאלה 4

הוכיחו כי $\mathbb{C}[x, y]/\langle xy-1 \rangle \cong \mathbb{C}[x, y]/\langle x^2+y^2-1 \rangle$.

שאלה 5

יהיו $\varphi: R \rightarrow S$ הומומורפיזם ו $I \triangleleft S$. נסמן: $I' = \varphi^{-1}(I)$ (ראינו ש $I' \triangleleft R$).

הראה ש $R/I' \cong (\text{Im}(\varphi) + I)/I \subseteq S/I$.