תנאים מספיקים לקיום גבול בנקודה מקיום הגבולות החוזרים.

הערה 1. מקיום של גבולות חוזרים ניתן בתנאים מסויימים להסיק קיום גבול.

הגדרה 2. נאמר שהפונקציה $f(x,t)$ מתכנסת במידה שווה ל $g(x)$ ב $X\times[c,d]$ ב p, אם $p\in[c,d]$, לכל $x\in X$ קיים הגבול

$$\lim_{t\to p}f(x,t)=g(x)$$

קיים, ולכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|t-p|<\delta$ אזי $|f(x,t)-g(t)|<\epsilon$.

נשים לב, שהמושג הוא לא ממש חדש, ואומר את הדבר הבא: לכל סדרה $t_n\to p$ הפונקציה $f(x,t_n)$ מתכנס במידה שווה ל $g(x)$. יתר על כך, כבר ראינו מקרה אחד.

הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ קיים אם ורק אם קיים l כך שהפונקציה $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה הקבועה $g(\theta)=l$.

המשפט הבא נותן תנאי מספיק לקיום גבולות חוזרים, שוויון שלהל וקיום גבול.

משפט 3. תהי (p,q) נקודת הצטברות (ייתכן שנקודה פנימית) של $(a,b)\times(c,d)$ ותהי f מוגדרת על כל $(a,b)\times(c,d)$ פרט אולי ל (p,q)(אם $(p,q)\in(c,d)$) ונניח שלכל $y\neq q$ קיים הגבול $\lim_{x\to p}f(x,y)$ ונניח שעל הקבוצה $[a,b]\setminus\{p\}$, $\lim_{y\to q}f(x,y)$ קיים ומתכנס במ"ש, אזי קיימים והגבולות החוזרים והגבול $\lim_{(x,y)\to(p,q)}f(x,y)$ ויש שוויון בינהם.

הוכחה. נסמן $\lim_{x\to p}f(x,y)=g(y)$ ונסמן $\lim_{y\to q}f(x,y)=h(x)$.

תחילה, נראה שהגבול $\lim_{y\to q}g(y)$ קיים. תהי $\{y_n\}$ סדרה שמתכנסת ל q כך ש $y_n\neq q$ לכל n. נראה שהסדרה מתכנסת. מכיוון ש $\lim_{y\to b}f(x,y)=h(x)$ במ"ש, לכל $0<\varepsilon$ קיים δ כך שאם ש $0<|y-\delta|<\epsilon$, אזי $|f(x,y)-h(x)|<\frac{\epsilon}{4}$. מצד שני, כיוון ש $y_n\to b$, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $0<|y_n-b|<\delta$. יהיו $N<n,m$. מכיוון ש $\lim_{x\to q}f(x,y_n)$ ו $\lim_{x\to p}f(x,y_m)$ קיימים, לכל סדרה $\{x_k\}$ שמתכנסת ל p מתקיים

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k,y_n)=g(y_n)\,,$$
$$.\lim_{k\to\infty}f(x_k,y_m)=g(y_m)$$

מצד שני, מאי שוויון המשולש, לכל k מתקיים

$$\begin{aligned}|f(x_k,y_n)-f(x_k,y_m)|&\leq|f(x_k,y_n)-h(x_k)|+|f(x_k,y_m)-h(x_k)|\\&<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

ולכן

$$\left|\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_n) - \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_m)\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty} |g(y_n) - g(y_m)| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

קיבלנו, ש $g(y_n)$ היא סדרת קושי, ולכן מתכנסת לגבול L. באותו אופן, ניתן להראות שלכל סדרה אחרת $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ ששואפת ל q, ל $g(y'_n)$ קיים גבול L'. נראה שהגבולות שווים. סדרה $\{y''_n\}_{n=1}^{\infty}$ על ידי

$$y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots$$

ברור שהסדרה שוב שואפת ל q, ולכן מתכנסת לגבול L''. מצד שני, L ו L' הם הבגולות של $\{g(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{g(y'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ בהתאמה ולכן גם גבולות חלקיים של $\{g(y''_n)\}_{n=1}^{\infty}$. מצד שני, $g(y''_n)$ מתכנסת ל L'' ולכן כל גבול חלקי שלה שווה ל L''. קיבלנו, $L = L'' = L'$ ולכן $\lim_{y\to q} g(y)$ קיים על פי קריטריון קושי.

נראה שמתקיים $\lim_{x\to a} h(x) = L$. יהי $\varepsilon > 0$. אזי, קיים ש δ' (בגלל שאיפה במ"ש וקיום הגבול שהראנו) כך שאם $|y-q| < \delta'$ אזי $|f(x,y) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ו $|h(y) - L| < \frac{\varepsilon}{3}$. נבחר y שרירותי כך ש $|y-q| < \frac{\varepsilon}{3}$. קיים δ כך שאם $0 < |x-p| < \delta$ אזי $|f(x,y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ מכיוון שקיים הגבול

$$\lim_{x\to p} f(x,y) = g(y).$$

נחבר את האי-שוויונות ונקבל.

$$\begin{aligned}|h(x) - L| &= |h(x) - f(x,y) + f(x,y) - g(y) + g(y) - L| \\ &\le |h(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - g(y)| + |g(y) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

הראנו, שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-p| < \delta$ אזי $|h(x) - L| < \varepsilon$ ולכן

$$\lim_{x\to p} h(x) = L$$

על פי ההגדרה.

עכשיו, נראה ש $\lim_{(x,y)\to(p,q)} f(x,y) = L$. יהי $0 < \epsilon$. קיים δ כך שאם,

$$|x-p| < \delta' \implies |h(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|y-q| < \delta' \implies |f(x,y) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

אזי אם

$$\begin{aligned}&\|(x,y) - (p,q)\| < \delta \implies \\ &|x-p| < \delta \wedge |y-q| < \delta \implies \\ &|h(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |f(x,y) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \\ &|f(x,y) - L| < |f(x,y) - h(x) + h(x) - L| \le \\ &\quad |f(x,y) - h(x)| + |h(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ולכן $\lim_{(x,y)\to(p,q)} f(x,y) = L$ על פי ההגדרה. $\square$