פיתרון תרגיל 5

1. . נמצא הע"ל $T,S:R^3\to R^3$ כך ש- $Ker(T)=Ker(S)=span\{(1,3,7),(2,5,6)\}$

וכן $\operatorname{Im}T=\operatorname{Im}S=span\{(1,2,3)\}$ בעזרת משפט ההגדרה :

עבור העתקה T:

$T(1,3,7)=T(2,5,6)=(0,0,0)$ ו נשלים לבסיס בעזרת הווקטור $(0,0,1)$. ולכן נגדיר $T(0,0,1)=(1,2,3)$. לפי משפט ההגדרה של העתקה לינארית קיימת רק אחת כזו. נגדיר הבסיס $B=\{(1,3,7),(2,5,6)(0,0,1)\}$.

נמצא את ההגדרה המפורשת שלה :

תחילה נמצא את הצ"ל: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&x\\3&5&0&y\\7&6&1&z\end{array}\right)\to\to\left(\begin{array}{ccc|l}1&0&0&y-5x\\0&1&0&3x-y\\0&0&1&z+17x-8y\end{array}\right)$ ולכן :

$$T(x,y,z)=T\left((y-5x)(1,3,7)+(3x-y)(2,5,6)+(z+17x-8y)(0,0,1)\right)$$
$$=(y-5x)(0,0,0)+(3x-y)(0,0,0)+(z+17x-8y)(1,2,3)=$$
$$(z+17x-8y,2z+34x-16y,3z+51x-24y)$$

בצורה מאד דומה נגדיר את S בשינויים קלים בלבד :

$S(1,3,7)=S(2,5,6)=(0,0,0)$ ונשלים לבסיס בעזרת הווקטור $(0,0,1)$. ולכן נגדיר $S(0,0,1)=(2,4,6)$.

באותה צורה נקבל

$$S(x,y,z)=S\left((y-5x)(1,3,7)+(3x-y)(2,5,6)+(z+17x-8y)(0,0,1)\right)$$
$$=(y-5x)(0,0,0)+(3x-y)(0,0,0)+(z+17x-8y)(2,4,6)=$$
$$(2z+34x-16y,4z+68x-32y,6z+102x-48y)$$

נמצא את וקטור הקואורדינאטות של $T(0,0,1)=(1,2,3)$: $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$

ולכן המטריצה המייצגת של T היא : $[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&4\end{pmatrix}$

$S(0,0,1)=(2,4,6)$ ולכן $\left[\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}$, והמטריצה המייצגת: $[S]_B=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&2\\0&0&8\end{pmatrix}$.

מטריצת ההרכבה : $[ST]_B=[S]_B[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&2\\0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-8\\0&0&8\\0&0&32\end{pmatrix}$.

יש לציין שהיה ניתן למצוא אינסוף העתקות כאלו וזוהי רק דוגמא מני רבות.

.2 תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית שהצגת ביחס לבסיס $S=\{(1,0,0),(1,0,2),(1,1,1)\}$

היא: $[T]_S=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$.

א. $v=(0,1,-5)$ (בבסיס סטנדרטי) ב- R^3 נחשב את $T(v)$ (גם בבסיס סטנדרטי):

לפי חישוב $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix}\right]_S$. והרי $[Tv]_S=[T]_S[v]_S$. נציב ונקבל:

$[T]_S[v]_S=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$. התוצאה שקיבלנו היא לפי בסיס S

ולכן אנחנו צריכים להמיר אותה לבסיס סטנדרטי:

$-4(1,0,0)+3(1,0,2)+0(1,1,1)=(-1,0,6)$ כלומר $T(v)=(-1,0,6)$.

ב. מצא בסיס לגרעין ולתמונה של T: נמצא את הגרעין והתמונה לפי הבסיס הנתון ונמיר אותו אח"כ לבסיס סטנדרטי. נקבל:

$\ker T=span\{(1,0,-2)\}$. $\operatorname{Im}(T)=span\{(1,0,0),(1,0,4)\}$.

.3 1. יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ טרנספורמציה לינארית המיוצגת בבסיס סדור $B=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

על ידי המטריצה $[T]_B=\begin{pmatrix}a&1-a&0\\a&2a&2a+2\\a+1&a+1&2a+2\end{pmatrix}$

נתון כי $(2,2,2)\in KerT$.

א. מצא את הערך הקבוע של a וחשב את $T(x,y,z)$ לכל $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

פתרון: נמצא את וקטור הקואורדינטות של $[(2,2,2)]_B$:

$(2,2,2)=a_1(1,0,0)+a_2(1,1,0)+a_3(1,1,1)$

יוצא ש- $a_1=a_2=0$ ו- $a_3=2$.

$$\begin{pmatrix}a&1-a&0\\a&2a&2a+2\\a+1&a+1&2a+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow 4a+4=0 \Leftarrow a=-1$.

ב. מצא את המטריצה המייצגת של T על פי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

פתרון: $[T]_s=[I]_S^B[T]_B[I]_B^S$

כאשר עוברים לבסיס הסטנדרטי פשוט צריך לשים את וקטורי הבסיס בעמודות וזאת מטריצת המעבר ולכיוון ההפוך זאת ההופכית שלה. אז נקבל: $[I]_S^B=$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ וההופכית שלה היא: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [I]_B^S$.

נכפיל את המטריצות ונקבל: $[T]_s = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ג. מצא בסיסים לגרעין ולתמונה של T. (השתמש במטריצה המייצגת).

פתרון: מכיון שכל תמונה של העתקה לינארית היא צירוף לינארי של עמודות

המטריצה המייצגת אותה אז אנו רואים כי: $ImT = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

ובגלל משפט המימדים אנו יודעים כי המימד של הגרעין צריך להיות 1 ולכן

$kerT = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

ד. מצא את וקטור הקואורדינטות של $T(2,-2,1)$ לפי הבסיס B.

פתרון: $T(2,-2,1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.

. יהיו $v_2 = (1,4,3,1)$ $v_1 = (1,2,3,1)$. **נגדיר** $W = \{T \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4) : v_1, v_2 \in ImT\}$

אז מהן האפשרויות עבור $dimW$?

המטריצה המייצגת היא בגודל 4×3 ומכיון ש־ v_1 ו־ v_2 הם וקטורים בת"ל

ותמונות אז הם צריכים להיות בעמודות ואין עוד אילוצים אז יש 4 מקומות

פנויים ולכן המימד הוא 4.

בונוס: 2. יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל שדה F. ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. אזי קיים $0<n$ כך ש:

$Ker(T^n)\cap Im(T^n)=\{0\}$.

פתרון: זה נכון הוכחה:

מכיון שהמימד של המרחב הוקטורי V הוא סופי אז קיים k שעבורו $ImT^k=ImT^{k+1}$ ולכן ע"פ משפט הדרגה $kerT^k=kerT^{k+1}$

אז הטענה היא שעבור $n=k+1$ הטענה מתקיימת כיון שאם $x\in kerT^k \Leftarrow x\in kerT^{k+1}\cap ImT^{k+1}$ ולכן לאחר שנפעיל את העתקה עוד פעם אחת האיבר הזה יעבור לאפס ולכן התמונה שלו תהיה ב-ImT^{k+1} כלומר האפס .