$$y'' + xy = 0$$

נחפש פתרון בצורה:
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

נציב במד"ר:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3) a_{n+3} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+3) a_{n+3} + a_n\right] x^{n+1} = 0$$

מקדם של x^0:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

עבור השאר:

$$(n+2)(n+3) a_{n+3} + a_n = 0$$

$$\boxed{a_{n+3} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+3)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

נמצא חלק מהמקדמים:

$\underline{n=0}$: $a_3 = \dfrac{-a_0}{2\cdot 3}$

$\underline{n=1}$: $a_4 = \dfrac{-a_1}{3\cdot 4}$

$\underline{n=2}$: $a_5 = \dfrac{-a_2}{4\cdot 5} = 0$

$\underline{n=3}$: $a_6 = \dfrac{-a_3}{5\cdot 6} = \dfrac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{a_0}{180}$

$\underline{n=4}$: $a_7 = \dfrac{-a_4}{6\cdot 7} = \dfrac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} = \dfrac{a_1}{504}$

ל"ג

הפתרון הוא מהצורה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots =$$
$$= a_0\cdot\left(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6-\dots\right)$$
$$+a_1\cdot\left(x-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7-\dots\right)$$

a_0, a_1 קבועים חופשיים

לקבוצה שלי (מיכאל): לא חובה, אבל ניתן לרשום את הפתרון המדוייק במונחים של פונקציית גמא. לצורך כך יש לראות שהמקדמים הם:

$$a_{3k}=\frac{(-1)^k}{(3k)!}\cdot a_0\cdot\prod_{j=1}^{k}(3j-2)$$

$$a_{3k+1}=\frac{(-1)^k}{(3k+1)!}\cdot a_1\prod_{j=1}^{k}(3j-1)$$

$$a_{3k+2}=0$$

ואז עם הנוסחה $\prod_{j=1}^{k}(nj-m)=\frac{n^k\,\Gamma\left(k+\frac{n-m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)}$ מקבלים:

$$a_{3k}=a_0\cdot\frac{(-1)^k}{(3k)!}\cdot\frac{3^k\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$a_{3k+1}=a_1\cdot\frac{(-1)^k}{(3k+1)!}\cdot\frac{3^k\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$a_{3k+2}=0$$

הפתרון הוא:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^k\,\Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)}{(3k)!\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}x^{3k}+a_1\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^k\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}{(3k+1)!\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot x^{3k+1}$$

רציף

(המשך שאלה 1)

נחפש שוב פתרון כנדרש

$$y'' - x^2 y = 0$$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ וכפי שראינו נקבל

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

נציב במד"ר:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$2a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+4) a_{n+4} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+4) a_{n+4} - a_n\right] x^{n+2} = 0$$

מקדם של X^0:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

מקדם של X^1:

$$6a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$$

כל השאר:

$$(n+3)(n+4) a_{n+4} - a_n = 0$$

$$\boxed{a_{n+4} = \frac{a_n}{(n+3)(n+4)} \qquad n = 0,1,2,\ldots}$$

נמצא חלק מהמקדמים:

$\underline{n=0}$: $a_4 = \frac{a_0}{3\cdot 4} = \frac{a_0}{12}$

$\underline{n=1}$: $a_5 = \frac{a_1}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{20}$

$\underline{n=2}$: $a_6 = \frac{a_2}{5\cdot 6} = 0$

$\underline{n=3}$: $a_7 = \frac{a_3}{6\cdot 7} = 0$

$\underline{n=4}$: $a_8 = \frac{a_4}{7\cdot 8} = \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} = \frac{a_0}{672}$

$\underline{n=5}$: $a_9 = \frac{a_5}{8\cdot 9} = \frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} = \frac{a_1}{1440}$

ב'ג (המשך שאלה 1)

הפתרון הוא מהצורה:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots =$$

$$= \boxed{a_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{672} x^8 + \dots\right) + a_1 \cdot \left(x + \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{1440} x^9 + \dots\right) \quad a_0, a_1 \text{ חופשיים}}$$

לבודק שלי: גם כאן ניתן, אך <u>לא חובה</u> למצוא את הפתרון המדויק:

המקדמים הם:

$$\begin{cases} a_{4k} = \dfrac{a_0}{(4k)!} \cdot \left[\prod_{j=1}^{k} (4j-3)\right]\left[\prod_{j=1}^{k} (4j-2)\right] = \dfrac{a_0}{(4k)!} \cdot \dfrac{4^k \Gamma(k+\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \cdot \dfrac{4^k \cdot \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ a_{4k+1} = \dfrac{a_1}{(4k+1)!} \cdot \left[\prod_{j=1}^{k} (4j-2)\right]\left[\prod_{j=1}^{k} (4j-1)\right] = \dfrac{a_1}{(4k+1)!} \cdot \dfrac{4^k \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \dfrac{4^k \cdot \Gamma(k+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \\ a_{4k+2} = 0 \\ a_{4k+3} = 0 \end{cases}$$

הפתרון הוא:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{2k} \Gamma(k+\frac{1}{4}) \Gamma(k+\frac{1}{2})}{(4k)! \cdot \Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{1}{2})} x^{4k} + a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2k} \Gamma(k+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\frac{3}{4})}{(4k+1)! \, \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{4})} x^{4k+1}$$

$$y''+(x-1)y'-y=0$$

נחפש פתרון בצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$\Rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$\Rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

נציב במשוואה:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$2a_2-a_1-a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$2a_2-a_1-a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+3)a_{n+3}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}=0$$

$$2a_2-a_1-a_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+3)a_{n+3}+(n+1)a_{n+1}-(n+2)a_{n+2}-a_{n+1}\right]x^{n+1}=0$$

מקדם של x^0:

$$2a_2-a_1-a_0=0\Rightarrow\boxed{a_2=\frac{a_0+a_1}{2}}$$

כל השאר:

$$(n+2)(n+3)a_{n+3}+na_{n+1}+\cancel{a_{n+1}}-(n+2)a_{n+2}-\cancel{a_{n+1}}=0$$

$$\boxed{a_{n+3}=\frac{(n+2)a_{n+2}-na_{n+1}}{(n+2)(n+3)}\qquad n=0,1,2,\dots}$$

לא נוכל: לבעיית הרקורסיה קשה לפתור במפורש.

נמצא חלק מהמקדמים:

$$\underline{n=0}:\ a_3=\frac{2a_2}{2\cdot3}=\frac{a_0+a_1}{2\cdot3}$$

$$\underline{n=1}:\ a_4=\frac{3a_3-a_2}{3\cdot4}=\frac{\frac{a_0+a_1}{2}-\frac{a_0+a_1}{2}}{3\cdot4}=0$$

$$\underline{n=2}:\ a_5=\frac{4a_4-2a_3}{4\cdot5}=-\frac{a_0+a_1}{60}$$

הפתרון הוא מהצורה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\frac{a_0+a_1}{2}x^2+\frac{a_0+a_1}{6}x^3+\dots$$

a_0, a_1 קבועים חופשיים

$$y'' + x^2 y' - 4xy = 0$$

נחפש פתרון בצורה: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

נציב ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+2} - 4a_0 x - \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n x^{n+1} = 0$$

$$2a_2 + (6a_3 - 4a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+4) a_{n+4} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_{n+1} x^{n+2} = 0$$

$$2a_2 + (6a_3 - 4a_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+4) a_{n+4} + (n+1) a_{n+1} - 4a_{n+1}\right] x^{n+2} = 0$$

המקדם של x^0:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

המקדם של x^1:

$$6a_3 - 4a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{4}{6} a_0 = \frac{2}{3} a_0}$$

השאר:

$$(n+3)(n+4) a_{n+4} + (n-3) a_{n+1} = 0$$

$$\boxed{a_{n+4} = -\frac{(n-3) a_{n+1}}{(n+3)(n+4)} \qquad n = 0,1,2,\dots}$$

נמצא חלק מהמקדמים:

$\underline{n=0}$: $a_4 = -\frac{-3a_1}{3\cdot 4} = \frac{a_1}{4}$

$\underline{n=1}$: $a_5 = -\frac{-2a_2}{4\cdot 5} = 0$

$\underline{n=2}$: $a_6 = -\frac{-a_3}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{45}$

הפתרון מהצורה:

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{45} x^6 + \dots\right) + a_1 \cdot \left(x + \frac{1}{4} x^4 + \dots\right)}$$

a_0, a_1 קבועים כלשהם.

לוין

ב. נציב את הטור במשוואת צ'בישב

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+2}}_{(1-x^2)y''}\underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}}_{-xy'}\underbrace{+\sum_{n=0}^{\infty}c\cdot a_n x^n}_{+cy}=0$$

מותר להוסיף אפסים

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=-2}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+2}-\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c\cdot a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\cdot n\cdot a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c\cdot a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+Ca_n\right]x^n=0$$

מקדם של x^n:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+(c-n^2\cancel{+n}\cancel{-n})a_n=0$$

נוח, הרקורסיה

$$\boxed{a_{n+2}=\frac{n^2-c}{(n+1)(n+2)}\cdot a_n \qquad n=0,1,2,\dots}$$

(*) אם c הוא מספר ריבועי, כלומר $\boxed{c=p^2}$ עבור $p=0,1,2,\dots$ נקבל פתרון פולינומי. (כלל שהמקדמים $a_{p+2}, a_{p+4},\dots$ כולם יהיו אפס)

ניקח $p=8$, $c=p^2=64$ ונקבל את הרקורסיה

$$a_{n+2}=\frac{n^2-64}{(n+1)(n+2)}a_n$$

אנו מעוניינים רק במקדמים הזוגיים:

$\underline{n=0}$: $a_2=\frac{-64}{1\cdot 2}a_0=-32a_0$

$\underline{n=2}$: $a_4=\frac{4-64}{3\cdot 4}a_2=\frac{-60}{12}a_2=-5\cdot(-32)a_0=160a_0$

$\underline{n=4}$: $a_6=\frac{16-64}{5\cdot 6}a_4=-\frac{8}{5}a_4=-256a_0$

$\underline{n=6}$: $a_8=\frac{36-64}{7\cdot 8}a_6=-\frac{1}{2}a_6=128a_0$

הפולינום המתקבל הוא:

$$\boxed{a_0\cdot(1-32x^2+160x^4-256x^6+128x^8)}$$

אפשר לקחת כל קבוע a_0. עדיף כשאמרתי שלכן שהמקדם צריך להיות 2^8 עבור החזקה המובילה

3.

א. $x^2y''-4xy'+6y=0$

נציב $y=x^\lambda$ ונקבל:

$y'=\lambda x^{\lambda-1}$

$y''=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$\Rightarrow x^2\cdot\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}-4x\lambda x^{\lambda-1}+6x^\lambda=0$

$x^\lambda\left[\lambda(\lambda-1)-4\lambda+6\right]=0 \quad /:x^\lambda$

$\lambda^2-5\lambda+6=0$

$\lambda_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=3,2$

$\Rightarrow \boxed{y=C_1x^3+C_2x^2}$

ב. $y''+\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=0 \quad /\cdot x^2$

$x^2y''+xy'+y=0$

נציב $y=x^\lambda$

$\Rightarrow x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}+x\lambda x^{\lambda-1}+x^\lambda=0$

$x^\lambda\left[\lambda(\lambda-1)+\lambda+1\right]=0 \quad /:x^\lambda$

$\lambda^2+1=0$

$\lambda_{1,2}=\pm i=\alpha\pm i\beta \quad \Big| \begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=1\end{matrix}$

$\Rightarrow \boxed{y=D_1\cdot\cos(\ln x)+D_2\sin(\ln x)}$

ג. $x^2y''-3xy'+4y=0$

נציב $y=x^\lambda$:

$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}-3x\lambda x^{\lambda-1}+4x^\lambda=0$

$x^\lambda\left[\lambda(\lambda-1)-3\lambda+4\right]=0$

$x^\lambda\left[\lambda^2-4\lambda+4\right]=0 \quad /:x^\lambda$

$(\lambda-2)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=2,2$ כפולים!

$\Rightarrow \boxed{y=x^2\cdot(C_1+C_2\ln x)}$

עמ' (המשך שאלה 3)

3. $(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = 0$

נציב משתנה חדש $t := 1+x$ ואז

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt} = 1 \cdot \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}$$

המשוואה הופכת להיות:

$$t^2 \ddot{y} - 3t\dot{y} + 4y = 0$$

זוהי משוואת אוילר רגילה! נחפש פתרון בצורה $y = t^{\lambda}$

$$\Rightarrow \dot{y} = \lambda t^{\lambda-1}$$

$$\ddot{y} = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$$

$$\Rightarrow t^2\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2} - 3t\lambda t^{\lambda-1} + 4t^{\lambda} = 0$$

$$t^{\lambda}[\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 4] = 0$$

$$t^{\lambda}[\lambda^2 - 4\lambda + 4] = 0 \quad /:t^{\lambda}$$

$$(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_{1,2} = 2, 2}_{\text{שורש כפול.}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = t^2 \cdot (c_1 + c_2 \ln t) = (x+1)^2 \cdot (c_1 + c_2 \ln(x+1))}$$

ה. $(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$

זוהי המשוואה הקודמת בתוספת רכיב אי הומוגני

מהמשוואה הקודמת ניתן למצוא שני פתרונות בת"ל למשוואה ההומוגנית הקשורה:

$$\begin{cases} y_1 = (x+1)^2 \\ y_2 = (x+1)^2 \ln(x+1) \end{cases}$$

הורונסקיאן שלהן הוא:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} (x+1)^2 & (x+1)^2\ln(x+1) \\ 2(x+1) & 2(x+1)\ln(x+1) + (x+1) \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

ק"ז

נרצה להשתמש בכלל קרמר עבור שיטת וריאציית המקדמים. אך לפני כן חשוב להעביר את המד"ר לצורה נורמלית:

$$y'' - \frac{3}{1+x} y' + \frac{4}{(1+x)^2} y = (1+x) = b(x)$$

אם כן:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & (x+1)^2 \ln(x+1) \\ b(x) & 2(x+1)\ln(x+1) + (x+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & (x+1)^2 \ln(x+1) \\ 1+x & 2(x+1)\ln(x+1) + (x+1) \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+1)^3 \ln(x+1)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} (x+1)^2 & 0 \\ 2(x+1) & b(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x+1)^2 & 0 \\ 2(x+1) & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

הפתרון הוא

$$y = y_1 \int \frac{W_1}{W} dx + y_2 \cdot \int \frac{W_2}{W} dx =$$

$$= (x+1)^2 \cdot \int -\frac{(x+1)^3 \ln(x+1)}{(x+1)^3} dx + (x+1)^2 \ln(x+1) \int \frac{\cancel{(x+1)^3}}{\cancel{(x+1)^3}} dx =$$

$$= -(x+1)^2 \int \ln(x+1) dx + (x+1)^2 \ln(x+1) \int dx =$$

$$= -(x+1)^2 \left[(x+1)\ln(x+1) - (x+1) + C_1 \right] + (x+1)^2 \ln(x+1)(x + C_2) =$$

$$= -C_1 (x+1)^2 - (x+1)^3 \ln(x+1) + (x+1)^3 + x(x+1)^2 \ln(x+1)$$

$$+ C_2 (x+1)^2 \ln(x+1)$$

$$= \boxed{A(x+1)^2 + B(x+1)^2 \ln(x+1) - (x+1)^3 \ln(x+1) + (x+1)^3 + x(x+1)^2 \ln(x+1)}$$

כלומר $A = -C_1$ עבור הקבועים החופשיים.

$B = C_2$

דף

4. א. למשוואה:

$$\alpha(\alpha-1)+a\alpha+b=0$$

$$\alpha^2+(a-1)\alpha+b=0$$

יש שורש כפול α, כלומר הדיסקרימיננטה היא 0:

$$\Delta=(a-1)^2-4\cdot1\cdot b=(a-1)^2-4b=0$$

(*) $\alpha=\frac{1-a\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{1-a}{2} \Rightarrow 2\alpha=1-a \Rightarrow 2\alpha+a=1$

נשתמש בהדרכה - נסמן:

$$y=x^{\alpha}\cdot z$$

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}z+x^{\alpha}z'$$

$$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z+2\alpha x^{\alpha-1}z'+x^{\alpha}z''$$

נציב במשוואת אוילר:

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha}z+2\alpha x^{\alpha+1}z'+x^{\alpha+2}z''+a\alpha x^{\alpha}z+ax^{\alpha+1}z'+bx^{\alpha}z=0$$

$$\underbrace{[\alpha(\alpha-1)-a\alpha+b]}_{=0}x^{\alpha}z+\underbrace{(2\alpha+a)}_{=1 \text{ לפי } (*)}x^{\alpha+1}z'+x^{\alpha+2}z''=0$$

$$\Rightarrow x^{\alpha+1}z'+x^{\alpha+2}z''=0 \,/ :x^{\alpha+1}$$

$$z'+xz''=0$$

נציב $z'=w \Rightarrow z''=w'$

$$\Rightarrow w+xw'=0$$

$$\Rightarrow w'=-\frac{w}{x}$$

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{w}{x} \Rightarrow \frac{dw}{w}=-\frac{dx}{x} \quad /\int(\cdot)$$

$$\Rightarrow \ln|w|=-\ln|x|+c$$

$$|w|=e^{-\ln|x|}\cdot e^{c}=\left(e^{\ln|x|}\right)^{-1}\cdot e^{c}=|x|^{-1}\cdot e^{c}$$

$$\Rightarrow w=\pm e^{c}\cdot x^{-1}=kx^{-1}$$

$$z'=kx^{-1} \quad /\int(\cdot)dx$$

$$z=k_1\ln x+k_2$$

$$\Rightarrow y=x^{\alpha}z=x^{\alpha}(k_2+k_1\ln x)=x^{\alpha}(c_1+c_2\ln x)$$

מש

4. (ב) נציב את $y=x^{\alpha}$ במשוואת אוילר ונדרוש שיתקיים פתרון:

$$y=x^{\alpha},\ y'=\alpha x^{\alpha-1},\ y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\ y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$$\Rightarrow x^{\alpha}\left[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)+a(\alpha)(\alpha-1)+b\alpha+c\right]=0 \ /:x^{\alpha}$$

$$\boxed{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)+a\alpha(\alpha-1)+b\alpha+c=0}$$

זהו התנאי על α!

(ג) (i) נניח שיש לתנאי שלשה שורשים ממשיים שונים $\alpha_{1,2,3}$

הפתרון הכללי של משוואת אוילר הוא:

$$\boxed{y=c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}+c_3x^{\alpha_3}}$$ $c_{1,2,3}\in\mathbb{R}$ קבועים חופשיים

(ii) נניח שיש לתנאי שורש ממשי אחד α_1 ושני שורשים מרוכבים

צמודים: $\alpha_{2,3}=p\pm iq$ הפתרון הכללי יהיה:

$$\boxed{y=c_1x^{\alpha_1}+x^{p}\cdot\left(c_2\cos(\ln q x)+c_3\sin(\ln q x)\right)}$$ $c_{1,2,3}\in\mathbb{R}$ קבועים חופשיים

(iii) נניח שלתנאי יש שורשים ממשיים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$. הפתרון הכללי יהיה:

כפול

$$\boxed{y=c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}+c_3\ln x\cdot x^{\alpha_2}}$$ $c_{1,2,3}\in\mathbb{R}$ קבועים חופשיים

[illegible]

5. נביא לצורה נורמלית

א. $xy''+2y'+3y=0 \quad /:x \longrightarrow$

$$y''+\frac{2}{x}y'+\frac{3}{x}y=0$$

$x=0$ נקודה סינגולרית, האם היא רגולרית סינגולרית?

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{2}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{3}{x}=0$$

קיימים!

$\Leftarrow$ $\boxed{x=0 \text{ נקודה רגולרית-סינגולרית}}$

ב. $x^2y''+2xy'+3y=0 \quad /:x^2$

$$y''+\frac{2}{x}y'+\frac{3}{x^2}y=0$$

$x=0$ נקודה סינגולרית. נבדוק האם היא רגולרית סינגולרית.

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{2}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{3}{x^2}=3$$

קיימים!

$\Leftarrow$ $\boxed{x=0 \text{ נקודה רגולרית-סינגולרית}}$

ג. $x^2y''+2y'+3xy=0 \quad /:x^2$

$$y''+\frac{2}{x^2}y'+\frac{3}{x}y=0$$

$x=0$ נקודה סינגולרית, נבדוק האם היא רגולרית סינגולרית

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}$$

לא קיים!

$\Leftarrow$ $\boxed{x=0 \text{ היא נקודה לא רגולרית-סינגולרית}}$

3 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0 \quad /:(1-x^2)$

$$y''-\frac{x}{1-x^2}y'+\frac{n^2}{1-x^2}y=0$$

$x=\pm 1$ נקודות סינגולריות נבדוק האם הן רגולריות סינגולריות.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{-x}{(1-x^2)}=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{+x}{1+x}=+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot n^2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2\cdot n^2}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)n^2}{1+x}=0$$

קיימים

$\Leftarrow$ $x=1$ נקודה רגולרית סינגולרית.

ד-ז

5. (המשך)

קיימים

$$\lim_{x\to -1} (x+1)\cdot\frac{-x}{1-x^2} = \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(1+x)}(-x)}{\cancel{(1+x)}(1-x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -1} (x+1)^2\cdot\frac{n^2}{1-x^2} = \lim_{x\to -1}\frac{(1+x)^2 n^2}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x\to -1}\frac{(1+x)n^2}{1-x} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x=-1 \text{ נקודה רגולרית סינגולרית גם כן}}$