הרצאה 10

נכתב על ידי נועם יערי

משפט (מבחן השורש/קושי)

יהי $\sum a_n$ טור חיובי, אזי:

א) אם יש $0 < q < 1$ כך ש $a_n^{\frac{1}{n}} \leq q$, מלבד מספר סופי של איברים, אז $\sum a_n < \infty$.

ב) אם יש אינסוף n-ים כך ש $a_n^{\frac{1}{n}} \geq 1$, אז $\sum a_n = \infty$.

הוכחה

א) $a_n \leq q^n$ מלבד מספר סופי של איברים. $\sum q^n < \infty$ ($0 < q < 1$, טור הנדסי), ולכן ממבחן השוואה, גם $\sum a_n < \infty$.

ב) מלבד מספר סופי של איברים, לכל n מתקיים: $a_n \geq 1$ ולכן $a_n \nrightarrow 0$, כלומר הטור מתבדר.

משפט (מבחן המנה)

יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם יש $0 < q < 1$ כך ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ פרט למספר סופי של איברים אז הטור מתכנס.

הוכחה

מספיק להוכיח כאשר הנתון מתקיים לכל n. $\frac{a_2}{a_1} \leq q \Leftarrow a_2 \leq a_1 q$. $\frac{a_3}{a_2} \leq q$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q \cdots a_3 \leq q a_2 \leq q^2 a_1$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \leq q a_{n-1} \underset{a_{n-1} \leq q^{n-2} a_1 \text{ הוכחת אינדוקציה}}{\leq} q^{n-1} a_1.$$

$\sum q^{n-1} a_1$ טור הנדסי ולכן מתכנס. $(q^0 = 1)$ $a_n \leq q^{n-1} a_1$ לכל n, לכן ממבחן ההשוואה גם $\sum a_n$ מתכנס.

■

משפט יותר כללי

עבור טורים חיוביים $\sum b_n$ $\sum a_n$. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לבסוף אז:

א) אם $\sum b_n < \infty$ אז $\sum a_n < \infty$.

ב) אם $\sum a_n = \infty$ אז $\sum b_n = \infty$.

הוכחה

$\frac{b_n}{b_1} = \frac{b_2}{b_1} \cdots \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} \geq_{\text{נתון}} \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_1}$.

$\infty > \sum b_n \frac{1}{b_1} = \sum\left(\frac{b_n}{b_1}\right)$. ממבחן ההשוואה, $\sum\left(\frac{a_n}{a_1}\right) = \sum a_n \frac{1}{a_1}$ לכן $\sum a_n$ גם מתכנס.■

אפשר להסיק את מבחן המנה מהמשפט האחרון, כך:

נתון $\frac{q^{n+1}}{q^n} = q \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$. $\infty > \sum q^n$, לכן מהמשפט האחרון גם $\infty > \sum a_n$ מתכנס. גם סעיף ב' באותו אופן. ■

מסקנה

אם $\sum a_n$ טור חיובי המקיים $1 > c \leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז $\infty > \sum a_n$. ואם $1 < c \leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\infty = \sum a_n$.

הוכחה

ניקח ϵ כך ש-$1 > \epsilon + c$. $c \leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}$, לכן לבסוף $\epsilon_{c+\epsilon=q<1} + c > \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ולכן מבחן המנה תקף.

אם $1 < c$, ניקח $0 < \epsilon$ כך ש $1 < c - \epsilon$. לבסוף $\frac{a_{n+1}}{a_n} < (c-\epsilon)_{=q} < 1$. מהמשפט, עבור $\frac{q^{n+1}}{q^n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $1 < q$ כיוון ש $\infty = \sum q^n$ גם $\infty = \sum a_n$.■

הערה

אם $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לבסוף, אז $a_n < a_{n+1}$ לבסוף, כלומר הסדרה היא סדרה חיובית עולה, ולכן $a_n \nrightarrow 0$

דוג'

מתי $\sum\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ מתכנס? $(a > 0)$

נפעיל את מבחן המנה: $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$.

(בהמשך הקורס או באינפי 2 נוכיח $\sum\left(\frac{a^n}{n!}\right) = e^a$.)

למה

לכל $a > 0$: $a^{\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} 1$

הוכחה

מספיק להוכיח עבור $a \geq 1$, כי אז עבור $0 < a < 1$, $1 \leq \frac{1}{a}$ ולכן

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{1} = 1$$

נניח אפוא $a \geq 1$:

הסדרה $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ יורדת. (אילו $a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n+1}}$, נעלה בחזקת $n(n+1)$ ונקבל: $1 > a$ בסתירה.)

$0 < a^{\frac{1}{n}}$ ויורדת לכן יש גבול $a^{\frac{1}{n}} \to b$. $\Leftarrow$ $a^{\frac{2}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \to b \cdot b = b^2$.

$a^{\frac{1}{n}}$ ת״ס של $a^{\frac{2}{n}}$, לכן $b \longleftarrow a^{\frac{1}{n}} \to b^2$. לכן $b = b^2$ ולכן $b \in \{0, 1\}$.

$$a \geq 1 \;\Rightarrow 1 \leq a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow b \geq 1 \Rightarrow \boldsymbol{b = 1}$$

■

הערה

אם מתקיים התנאי של מבחן המנה אז מתקיים התנאי של מבחן השורש.

הוכחה

ראינו שהתנאי של מבחן המנה גורר $a^n \leq q^{n-1} a_1$ $\Leftarrow$

$$a_n^{\frac{1}{n}} \leq (q^{n-1}a_1)^{\frac{1}{n}} = q^{\frac{n-1}{n}} a_1^{\frac{1}{n}} = q \cdot \frac{1}{\underbrace{q^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}} \cdot \underbrace{a_1^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}$$

לכן $\frac{a_n^1}{n} \to q < 1$ ולכן עבור $\epsilon > 0$ מספיק קטן לבסוף $a_n^{\frac{1}{n}} < q + \epsilon < 1$. כלומר מתקיים תנאי מבחן השורש עבור $0 < \tilde{q} < 0$.

דוג'

$\sum\left(q^{n+(-1)^n}\right)$, $0<q<1$. מבחן השורש:

$$\left(q^{n+(-1)^n}\right)^{\frac{1}{n}}=q\cdot q^{\frac{(-1)^n}{n}}$$

n זוגי: $=q\cdot q^{\frac{1}{n}}\to q$

n אי זוגי: $q\cdot\frac{1}{q^{\frac{1}{n}}}\to q$

כיוון ש $N=(2k)\cup(2k+1)$ הגבול הוא $q<1$ ולכן הטור מתכנס.

מבחן המנה:

$$\frac{a^{n+1}}{a_n}=$$

כאשר n זוגי: $\frac{q^{n+1-1}}{q^{n+1}}=q^{-1}$

כאשר n אי זוגי: $\frac{q^{n+1+1}}{q^{n-1}}$

לא עוזר למבחן.