פתרון הבוחן

25 במאי 2015

1. א. כדי להראות שהמרחב הוא מרחב טופולוגי, יש להראות שמתקיימות 3 תכונות:
1. מהגדרת τ_a, $\emptyset \in \tau_a$. כמו כן, $a \in X$ ולכן גם $X \in \tau_a$.
2. יהי $\{O_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_a$ אוסף כלשהו של קבוצות (לא ריק).
מכיוון שלכל $i \in I$, $O_i \in I$, $a \in O_i$ לכל $i \in I$ ולכן:

$$a \in \bigcup_{i\in I} O_i$$

ופירוש הדבר שאכן $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau_a$.
3. יהי $\{O_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau_a$ אוסף סופי של קבוצות (לא ריק).
אם קיים $1 \leq j \leq n$ עבורו: $O_j = \emptyset$, נקבל ש:

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i = \emptyset$$

אחרת, לכל $1 \leq i \leq n$ מהגדרת τ_a נקבל ש: $a \in O_i$, ולכן:

$$a \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$$

ובכל מקרה $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau_a$.
אם כן, τ_a מקיימת את התכונות הדרושות ולכן היא טופולוגיה.
ב. כדי שהמרחב יהיה לא קשיר, צריכות להיות שתי קבוצות זרות, פתוחות ולא ריקות $U, V \in \tau_a$ כך ש: $U \cup V = X$.
דא עקא, $U, V \in \tau_a$ לא ריקות פירושו $a \in U$ וגם $a \in V$, ולכן הן בהכרח לא זרות.
אם כן, לא קיימות שתי קבוצות זרות, פתוחות ולא ריקות $U, V \in \tau_a$ כך ש: $U \cup V = X$, ולכן X קשיר.
ג. במרחב שלנו יותר משני איברים ($|X| \geq 2$) ולכן $\{a\}^c \neq \emptyset$. כמו כן, $a \notin \{a\}^c$ ולכן $\{a\}^c$ אינה קבוצה פתוחה.

מכאן ש־$\{a\} = (\{a\}^c)^c$ לא סגורה, אך אנו יודעים שבמרחב מטרי כל נקודון הוא סגור ולכן מרחבנו אינו מטריזבילי.

ד. נפריד למקרים.

כאשר X סופי, $|\tau_a| \leq |P(X)| < \aleph_0$ ובוודאי שלכל כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי סופי, כי כל כיסוי פתוח הוא סופי בעצמו.

כאשר X אינסופי, נתבונן בכיסוי:

$$\bigcup_{b \in X} \{a, b\} = X$$

מהגדרת τ_a נקבל שזהו אכן כיסוי פתוח ($\forall b \in X, a \in \{a, b\} \to \{a, b\} \in \tau_a$).

מצד שני, לכל $c \in X$, $\bigcup_{b \in X \setminus \{c\}} \{a, b\} = X \setminus \{c\} \subsetneq X$ ובוודאי שאין לו תת כיסוי סופי.

לכן במקרה זה X אינו קומפקטי.

2. נראה שכל נקודון $\{a\}$ הוא פתוח. לשם כך נראה שכל קבוצה משלימה של נקודון, $\{a\}^c$, היא סגורה.

במרחב מטרי, קבוצה היא סגורה $\iff$ היא מכילה את כל נקודות הגבול של סדרות שמוכלות בה.

כעת, תהי $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{a\}^c$ סדרה מתכנסת, ונסמן את גבולה ב־x.

במרחב שלנו כל סדרה מתכנסת היא קבועה לבסוף וכל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת אל הערך אליו היא שווה לבסוף (זה נכון בכל מ"ט).

לכן קיים N כך שלכל $n \geq N$, $x_n = x$.

לכל $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \{a\}^c$ ולכן $x \in \{a\}^c$.

אם כן, הקבוצה $\{a\}^c$מכילה את נקודות הגבול של סדרות שמוכלות בה, ולכן היא קבוצה סגורה.

לכן, המשלימה שלה $\{a\}$ היא קבוצה פתוחה.

אם כן, כל נקודון הוא פתוח. איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה, ולכן לכל $A \subseteq X$ לפי הלמה השימושית:

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

A פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות.

אם כן כל $A \subseteq X$ היא פתוחה, ולכן המטריקה משרה את הטופולוגיה הדיסקרטית (שבה כל קבוצה היא פתוחה).

3. לפי הגדרת סגור:

$$cl(A) = \bigcap_{A \subseteq S} S$$

כאשר S סגורה. כעת אם S סגורה, S^c פתוחה. בנוסף, אם $A \subseteq S$, אז $A^c \subseteq S^c$.
אם כן, לפי דה מורגן:

$$cl(A) = \bigcap_{A \subseteq S} S = \left(\bigcup_{s^c \subseteq A^c} S^c \right)^c$$

כאשר S^c פתוחה. לפי הגדרת פנים נקבל:

$$cl(A) = \bigcap_{A \subseteq S} S = \left(\bigcup_{s^c \subseteq A^c} S^c \right)^c = (int(A^c))^c$$