

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100.
משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{ג.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x \right)^x \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(1+2x))^4}{(1-\cos(x))^2 \ln(x)} \quad \text{א.}$$

2.

א. חשבו את $\int (\tan(x))^2 dx$.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$.

3. נביט בפונקציה $f(x) = e^x - x + a$.

א. מצאו את הערך המינימלי של f בכל \mathbb{R} .

ב. קבעו לכל ערך של a כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$, והוכיחו תשובתכם.

4. תהי f פונקציה גזירה בכל הממשיים כך ש $f(0) = 0, f(1) = 1$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f'(x) \leq 1$.

א. הוכיחו כי לכל $x \in [0, 1]$ מתקיים $f(x) = x$.

ב. מצאו f המקיימת את תנאי השאלה כך ש $f(-1) \neq -1$.

(רמז: פונקציה מפוצלת/תפר.)

5. תהי סדרה a_n המקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = e^{a_n}$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + 2\sin\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + n\sin\left(\frac{n}{n}\right)}{n^2}$.

ב. חשבו את e עד רמת דיוק של $h = 0.01$.