פתרון מבחן מועד א' – חדו"א 2 לאודיסאה- 86-148 – 20/06/24

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2)-x^2}{x^6} & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{6} & x=0\end{cases}$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל$f(x)$.

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\sin(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots$$

$$\sin(x^2)-x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}=-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots$$

עבור $x\neq 0$ נחלק את שני הצדדים בx^6 ונקבל

$$\frac{\sin(x^2)-x^2}{x^6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n-4}}{(2n+1)!}=-\frac{1}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\cdots$$

לבסוף נשים לב שעבור $x=0$ הטור שווה ל$-\frac{1}{6}$ ולכן סה"כ לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n-4}}{(2n+1)!}$$

ב. חשבו את $f^{(4)}(0)$.

המקדם של x^4 בטור טיילור המתכנס לf הינו $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$

לפי החישובים בסעיף קודם, מצאנו כי המקדם של x^4 בטור הטיילור הוא $\frac{1}{5!}$

ביחד

$$f^{(4)}(0)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \frac{\ln(n+x^2)}{n}$$

א. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בכל הממשיים.

ראשית נשים לב כי

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t+a)}{t} = \left\{\frac{\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t+a}}{1} = \left\{\frac{1}{\infty}\right\} = 0$$

ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ פונקצית הגבול הינה

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\,(n+x^2)}{n} = 0$$

כעת נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\ln(n+x^2)}{n} - 0\right|$$

כעת, כיוון ש

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(n+x^2)}{n} = \infty$$

מתקיים כי $d_n = \infty$ ולכן סדרת החסמים אינה שואפת לאפס, וסדרת הפונקציות אינה מתכנסת במ"ש בכל הממשיים.

ב. קבעו והוכיחו אם סדרת הנגזרות $f_n'(x)$ מתכנסת במידה שווה בכל הממשיים.

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{n(n+x^2)}$$

נחשב את פונקצית הגבול של סדרת הנגזרות

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x}{n(n+x^2)} = \left\{\frac{\text{קבוע}}{\infty}\right\} = 0$$

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{2x}{n(n+x^2)} - 0\right|$$

נביט בביטוי $\frac{2|x|}{n+x^2}$.

כאשר $|x| \le 1$ נקבל כי

$$\frac{2|x|}{n+x^2} \le \frac{2\cdot 1}{n+0} \le 2$$

כאשר $|x| > 1$ נקבל כי

$$\frac{2|x|}{n+x^2} \le \frac{2|x|}{0+x^2} = \frac{2}{|x|} < 2$$

לכן סה"כ לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$\frac{2|x|}{n+x^2} \le 2$$

ולכן

$$\frac{2|x|}{n(n+x^2)} \le \frac{1}{n}$$

כלומר

$$d_n \le \frac{1}{n} \to 0$$

ולכן $d_n \to 0$ ואכן סדרת הנגזרות מתכנסת במ"ש בכל הממשיים.

3. תהי $u(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית, ונניח כי לכל $y > 0$ מתקיים כי

$$u(x,y) = u\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

א. הוכיחו כי לכל $y > 0$ מתקיים כי $y^2 u_y(x,y) = -x\, u_x\left(\frac{x}{y}, 1\right)$

נגזור את שני צידי המשוואה הנתונה לפי y

$$u_y(x,y) = u_x\left(\frac{x}{y}, 1\right) \cdot \frac{-x}{y^2} + u_y\left(\frac{x}{y}, 1\right) \cdot 0$$

נכפול בy^2 ונקבל את מה שצריך להוכיח.

ב. הוכיחו כי לכל $y > 0$ מתקיים כי $y\, u_y(x,y) + x\, u_x(x,y) = 0$

נגזור את שני צידי המשוואה הנתונה לפי x

$$u_x(x,y) = u_x\left(\frac{x}{y}, 1\right) \cdot \frac{1}{y} + u_y\left(\frac{x}{y}, 1\right) \cdot 0$$

ולכן

$$x\, u_x(x,y) = \frac{x}{y} u_x\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

מסעיף א'

$$y\, u_y(x,y) = -\frac{x}{y} u_x\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

ולכן אכן מתקיים כי $x u_x(x,y) + y u_y(x,y) = 0$

4. יהיו פרמטרים $a, b \in \mathbb{R}$ ותהי פונקציה $f(x,y) = x^2 - y^2 + ax + by$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,1)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטרים a, b.

$$f_x(x,y) = 2x + a$$

$$f_y(x,y) = -2y + b$$

$$f(1,1) = a + b$$

$$f_x(1,1) = 2 + a$$

$$f_y(1,1) = b - 2$$

ולכן סה"כ משוואת המישור המשיק הינה

$$z - (a + b) = (2 + a)(x - 1) + (b - 2)(y - 1)$$

ב. מצאו וסווגו את הנקודות החשודות לקיצון מקומי, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטרים a, b.

נחשב את הנקודות הקריטיות, כלומר הנקודות בהן הגרדיאנט מתאפס.

$$f_x(x,y) = 0$$

$$2x + a = 0$$

$$x = -\frac{a}{2}$$

$$f_y(x,y) = 0$$

$$-2y + b = 0$$

$$y = \frac{b}{2}$$

לכן הנקודה הקריטית היחידה היא

$$\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

כעת נחשב את Δ

$$f_{xx}(x,y) = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = -2$$

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = -4 - 0^2 < 0$$

לכן מדובר בנקודת אוכף.

5. נטע הכינה עוגת יום הולדת לנעם, שהתחתית שלה היא התחום $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ וגובהה הוא $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. מצאו את שטח הפנים ואת הנפח של העוגה של נעם.

נשים לב כי העוגה הינה בצורת החצי העליון של ספירת היחידה, ובפרט אין לה קירות אלא רק רצפה ותקרה.

שטח הרצפה הוא שטח מעגל היחידה, והוא כמובן שווה לπ.

נחשב את שטח התקרה, שהוא חצי שטח הפנים של ספירת היחידה.

ניקח פרמטריזציה של התקרה M בקואורדינטות כדוריות

$$\vec{s}(\theta,\varphi)=(\sin(\theta)\cos(\varphi),\sin(\theta)\sin(\varphi),\cos(\theta))$$

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\varphi\in[0,2\pi]$$

שטח הפנים של המשטח הוא האינטגרל המשטחי מסוג ראשון של הפונקציה הקבועה 1

$$\iint_M 1dS=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot\left|\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi\right|d\theta\right)d\varphi$$

נחשב את המכפלה הוקטורית

$$\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi=\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ \cos(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & 0\end{pmatrix}=$$

$$=(\sin^2(\theta)\cos(\varphi),\sin^2(\theta)\sin(\varphi),\cos^2(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta)+\sin^2(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta))=$$

$$=(\sin^2(\theta)\cos(\varphi),\sin^2(\theta)\sin(\varphi),\cos(\theta)\sin(\theta))$$

ולכן

$$\left|\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi\right|=\sqrt{\sin^4(\theta)\cos^2(\varphi)+\sin^4(\theta)\sin^2(\varphi)+\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}=$$

$$=\sqrt{\sin^4(\theta)+\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}=\sqrt{\sin^2(\theta)\left(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right)}=\sin(\theta)$$

הערה: סינוס חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

לכן סה"כ שטח התקרה הוא

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta)\,d\theta\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left([-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}1d\varphi=2\pi$$

סה"כ שטח הפנים של העוגה הוא 3π.

כעת נחשב את נפח העוגה, כלומר הנפח של החצי העליון של ספירת היחידה.

אפשר לחשב את האינטגרל המשולש על תחום העוגה של הפונקציה הקבועה 1 על מנת לקבל את נפחה.

$$V=\{(x,y,z)|(x,y)\in D, 0\le z\le f(x,y)\}$$

כמובן שמוטב לנו לעבור לקואורדינטות כדוריות

$$\iiint_V 1dxdydz=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 1\cdot r^2\sin(\theta)\,dr\right)d\theta\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{1}{3}\right)d\theta\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{3}\cos(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\varphi=\frac{2\pi}{3}$$

6. נסמן בM את שטח הפנים העליון של העוגה של נעם:

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z=\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

נעם שאפה לקראת הנשיפה לכבות את הנרות שעל העוגה, עוצמת לחץ האוויר שיצרה מתואר על ידי השדה הוקטורי

$$\vec{F}(x,y,z)=(1-z)\hat{\imath}+(1-z)\hat{\jmath}+(1-z)\hat{k}$$

חשבו את השטף של האוויר שפגע בעוגה, כלומר את האינטגרל המשטחי מסוג שני

$$\iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS$$

כאשר הנורמל $\hat{n}$ מכוון כלפי פנים העוגה.

דרך ראשונה:

נעזר במשפט גאוס (הדיברגנץ)

נשלים את המשטח לשפה החצי העליון של הספירה בעזרת משטח הרצפה

$$N=\{(x,y,z)|x^2+y^2\le 1, x=0\}$$

הנתון ע"י הפרמטריזציה

$$\vec{q}(r,\theta)=(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0)$$

$$r\in[0,1]$$

$$\theta\in[0,2\pi]$$

לפי גאוס האינטגרל המשטחי מסוג שני על שפת חצי הספירה V, אשר שווה ל$M \cup N$ עם הנורמלי מכוון כלפי חוץ הספירה שווה לאינטגרל המשולש על V של הדיברגנץ של השדה:

$$\iint_{M\cup N} \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dxdydz$$

כעת

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(1-z,1-z,1-z) = 0+0-1$$

וביחד

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dxdydz = -\iiint_V 1dxdydz$$

שזה מינוס נפח העוגה שחשבנו בשאלה קודמת, כלומר

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dxdydz = -\frac{2\pi}{3}$$

כעת

$$-\frac{2\pi}{3} = \iint_{M\cup N}\vec{F}\cdot\hat{n}dS = \iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS + \iint_N \vec{F}\cdot\hat{n}dS$$

כאשר האינטגרל שאנו מעוניינים בו הוא

$$-\iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \frac{2\pi}{3} + \iint_N \vec{F}\cdot\hat{n}dS$$

(זכרו כי בשאלה התבקשנו למצוא את השטח בכיוון פנים העוגה, ואילו במשפט גאוס הנחנו כי הנורמל מכוון כלפי חוץ)

לפיכך נותר לנו לחשב את $\iint_N \vec{F}\cdot\hat{n}dS$ כאשר הנורמל מכוון כלפי חוץ העוגה (ציר z בכיוון שלילי).

$$\iint_N \vec{F}\cdot\hat{n}dS = (+\text{ או }-)\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\vec{F}\big(\vec{q}(r,\theta)\big)\cdot(\vec{q}_r\times\vec{q}_\theta)d\theta\right)dr$$

$$\vec{q}_r\times\vec{q}_\theta = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\end{pmatrix} = (0,0,r)$$

כיוון ש $r>0$ הנורמל הוא המינוס של המכפלה הוקטורית ונקבל כי

$$\iint_N \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\vec{F}\big(\vec{q}(r,\theta)\big)\cdot(0,0,-r)d\theta\right)dr$$

כמו כן

$$\vec{F}\big(\vec{q}(r,\theta)\big) = \vec{F}(r\cos(\theta),r\sin(\theta),0) = (1,1,1)$$

ולכן

$$\iint_N \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} -rd\theta\right)dr = -2\pi\int_0^1 rdr = -2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = -\pi$$

ולכן סה"כ התשובה היא

$$-\iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \frac{2\pi}{3}-\pi = -\frac{\pi}{3}$$

דרך שנייה:

נחשב ישירות את האינטגרל, כאשר נשתמש בפרמטריזציה של המשטח שהצגנו בשאלה קודמת

$$\vec{s}(\theta,\varphi) = (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$$

$$\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\varphi \in [0,2\pi]$$

$$\iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \pm\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}\big(\vec{s}(\theta,\varphi)\big)\cdot\big(\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi\big)d\theta\right)d\varphi$$

חשבנו את המכפלה הוקטורית בשאלה קודמת

$$\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi = (\sin^2(\theta)\cos(\varphi), \sin^2(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\sin(\theta))$$

כיוון ש $\cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ חיובי בתחום $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ אנחנו צריכים לקחת את המינוס של הנורמל (הרי בקשו נורמל כלפי פנים העוגה).

כעת

$$\vec{F}\big(\vec{s}(\theta,\varphi)\big) = \vec{F}(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)) = (1-\cos(\theta), 1-\cos(\theta), 1-\cos(\theta))$$

ולכן

$$\vec{F}\big(\vec{s}(\theta,\varphi)\big)\cdot\big(\vec{s}_\theta\times\vec{s}_\varphi\big) = (1-\cos(\theta))\cdot(1,1,1)\cdot(\sin^2(\theta)\cos(\varphi), \sin^2(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\sin(\theta)) =$$

$$= (1-\cos(\theta))[\sin^2(\theta)(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))+\cos(\theta)\sin(\theta)]$$

ביחד נקבל כי

$$\iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS = -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(\theta))[\sin^2(\theta)(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))+\cos(\theta)\sin(\theta)]d\theta\right)d\varphi$$

נשים לב כי

$$\int_{0}^{2\pi}[\cos(\varphi)+\sin(\varphi)]d\varphi=[\sin(\varphi)-\cos(\varphi)]_{0}^{2\pi}=0$$

ולכן

$$\iint_{M}\vec{F}\cdot\hat{n}dS=-\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(\theta))[\cos(\theta)\sin(\theta)]d\theta\right)d\varphi$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(\theta))[\cos(\theta)\sin(\theta)]d\theta=\begin{Bmatrix}t=\cos(\theta)\\dt=-\sin(\theta)\end{Bmatrix}=-\int_{1}^{0}t(1-t)dt=\int_{0}^{1}(t-t^2)dt=$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

ולכן סה"כ נקבל

$$\iint_{M}\vec{F}\cdot\hat{n}dS=-\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{6}d\varphi=-\frac{2\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$$