Scaling

Scaling היא שיטה שמבוססת על Pivoting ועוזרת למצוא פתרון למערכת משוואות.

דוגמה

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 & 105 \\ -1 & 3 & 100 & 102 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

באמצעות פיווטינג, נגיע לפתרון

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 & 105 \\ 0 & 3.67 & 1.33 & 1.35 \\ 0 & 0 & -82.4 & -82.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0.939 \\ 1.09 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

רוצים למצוא פתרון יותר מדויק

הרעיון

נגדיר לכל שורה את האיבר הכי גדול בה, הוא סדר הגודל שלה - נגדיר ווקטור scaling:
$S = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 2 \end{bmatrix}$.
נחלק את האיבר הראשון בכל שורה באיבר הגדול ביותר:

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/100 \\ -1/100 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03 \\ -0.01 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

ואז עושים את השחלוף לפי $R^{(1)}$, לא לפי המטריצה המקורית. במקרה שלנו - נחליף את השורה הראשונה והשלישית:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 99 & 104 \\ 0 & -4 & 103 & 99 \end{bmatrix}$$

נמשיך:

$$S = \begin{bmatrix} 2 \\ 99 \\ 103 \end{bmatrix} \qquad R^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.05 \\ -0.04 \end{bmatrix}$$

לכאורה, צריך לשחלף את השורה השנייה עם הראשונה, כדי שהאיבר הגדול ביותר בערכו המוחלט - 1 - ישב במקום השני. אבל אנחנו לא יכולים לשחלף עם 1 - כי הוא כבר מעל האלכסון - ולכן לא נבצע שחלוף(כי $0.05 = \max\{|0.05|, |-0.04|\}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 99 & 104 \\ 0 & 0 & 182 & 182 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

שיטת יעקובי

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

הרעיון הוא בשורה הi, לבטא את x_i באמצעות הxים האחרים:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.3333x_2^{(k)} - 0.6667x_3^{(k)} + 1.833 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2857x_1^{(k)} - 0.2857x_3^{(k)} + 0.714 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 0.2 \end{cases}$$

עכשיו נבצע פירוק:

$$A = D + L + U$$

כאשר D האלכסון של A, L משולשית תחתונה וU משולשית עליונה

$$Ax = b \Rightarrow (D + R)\,x = b$$

$$Dx + Rx = b$$

$$Dx = b - Rx$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left(b - Rx^{(k)}\right) = D^{-1} \cdot b - D^{-1} \cdot Rx^{(k)}$$

$$T = -D^{-1} \cdot R \qquad C = D^{-1} \cdot b$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C}$$

דוגמה

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1429 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1429 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 1.858 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.7145 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.5 \\ 1.858 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1.435 \end{bmatrix}$$

עבור המשך הקירוב, כבר חישבנו את T, C, ואפשר להשתמש בהם שוב.
עוצרים את הקירוב לפי מספר איטרציות, לפי

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| < \delta$$

או לפי

$$\left\| Ax^{(k)} - b \right\| < \epsilon$$

מתי זה מתכנס?

יש כמה תנאים להתנכסות של שיטת יעקובי:

- A שולטת אלכסונית:

$$\forall_i \; |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

- $\left| \rho \left(D^{-1} \cdot R \right) \right| < 1$ - אם ניתן לחסום את הערכים העצמיים עם 1, אז זה מתכנס.

דוגמה

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A שולטת אלכסונית - $\begin{matrix} 4 > 2 + 0 \\ 10 > 2 + 4 \\ 5 > 4 + 0 \end{matrix}$ - וגם הערכים העצמיים חסומים ב1, ולכן השיטה תתכנס.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}0&2&0\\2&0&4\\0&4&0\end{bmatrix}$$

$$T=-D^{-1}R=\begin{bmatrix}0&-0.5&0\\-0.2&0&-0.4\\0&-0.8&0\end{bmatrix}$$

$$C=D^{-1}\cdot b=\begin{bmatrix}0.5\\0.6\\1\end{bmatrix}$$

$$x^{(k)}=\begin{bmatrix}0&-0.5&0\\-0.2&0&-0.4\\0&-0.8&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\-0.6\\-0.8\end{bmatrix}$$

מספר מצב

תזכורת: מספר מצב זה מדד שמודד כמה הפונקציה רגישה לטעויות בנקודה מסויימת.

נגדיר מספר מצב גם עבור מטריצות:

$$\mathrm{Cond}\left(A\right)=\left\|A\right\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|$$

מתקיים תמיד: $\mathrm{Cond}\left(A\right)\geq 1$. למה?

$$1=\left\|I\right\|=\left\|A\cdot A^{-1}\right\|\leq\left\|A\right\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|=\mathrm{Cond}\left(A\right)$$

מה קורה בקירוב?

$$\vec{b}^{*}=\vec{b}+\vec{r}\qquad r=b-b^{*}$$

$$\vec{x}^{*}=\vec{x}+\vec{e}\qquad e=x-x^{*}$$

$$Ax^{*}=b^{*}$$

$$A\left(x+e\right)=b+r$$

$$\cancel{Ax}+Ae=\cancel{b}+r$$

$$Ae = r$$

$$e = A^{-1}r \Rightarrow \|e\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|r\|$$

$$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{Cond}\,(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

דוגמה

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 111 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} \begin{bmatrix} 101 & -10 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 111 \qquad \left\|A^{-1}\right\|_1 = 111$$

(תזכורת - כדי לחשב $\|\cdot\|_1$ של מטריצה, לוקחים את סכום הערכים המוחלטים של העמודה עם הסכום הכי גבוה)

$$\text{Cond}\,(A) = 111 \cdot 111 = 12321$$

זה מספר ממש גדול. הפתרון למשוואה הוא $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. אם נשנה את b שינוי קטן - $b^* = \begin{bmatrix} 11 \\ 111.1 \end{bmatrix}$ - נקבל $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.1 \end{bmatrix}$ - השינוי מ1 ל0 הוא שינוי ממש גדול!

המקרים האחרים - בדפי התרגול!

אינטרפולציה

אינטרפולציה היא מציאת הערכה לפונקציה לפי נקודות. למשל סרטוט גרף לפי מספר קטן של נקודות.

הגדרה

נתונות לנו $n+1$ נקודות דגימה $\left(x_0,y_0\right),\dots\left(x_n,y_n\right)$, ונתונות לנו $n+1$ פונקציות בסיס $\phi_0\left(x\right),\dots\phi_n\left(x\right)$.
המטרה: לבנות צירוף לינארי

$$p\left(x\right)=C_0\phi_0\left(x\right)+C_1\phi_1\left(x\right)+\cdots+C_n\phi_n\left(x\right)$$

כך ש

$$\forall_{0\leq i\leq n}p\left(x_i\right)=y_i$$

p נקרא אינטרפולציה("ביון" בשפת הקודש)

נכתוב את זה בצורה של סט משוואות:

$$\begin{cases} p\left(x_0\right)=C_0\phi_x\left(x_0\right)+\cdots+C_n\phi_n\left(x_0\right)=y_0\\ \vdots\\ p\left(x_n\right)=C_0\phi_0\left(x_n\right)+\cdots+C_n\phi_n\left(x_n\right)=y_n\end{cases}$$

ניתן לתרגם את זה למערכת לינארית:

$$\begin{bmatrix}\phi_0\left(x_0\right) & \cdots & \phi_n\left(x_0\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \phi_0\left(x_n\right) & \cdots & \phi_n\left(x_n\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_0\\ \vdots\\ C_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

נשים לב! הפעם הx ידועים, והמקדמים C_i לא ידועים.

דוגמה

הפונקציות שלנו הן $1,\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right),\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$, והנקודות $\left(2,5\right),\left(1,2\right),\left(0,1\right)$.

$$p\left(x\right)=C_0\cdot1+C_1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+C_2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

$$\begin{cases} p\left(0\right)=C_0\cdot1+C_1\cdot\sin\left(0\right)+C_2\cdot\cos\left(0\right)=1\\ p\left(1\right)=C_0\cdot1+C_1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+C_2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\\ p\left(2\right)=C_0\cdot1+C_1\cdot\sin\left(\pi\right)+C_2\cdot\cos\left(\pi\right)=5\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 5\end{bmatrix}\qquad\vec{C}=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ -2\end{bmatrix}$$

כמה אפשרויות יש?

יכולות להיות הרבה אינטרפולציות לאותו סט של נקודות עם אותן פונקציות.

אינטרפולציה פולינומית

$$\phi_i(x) = x^i$$

נורא קל לחשב פולינומים, ובגלל זה אנחנו אוהבים לעבוד איתם. כאשר יש לנו סט כזה של פולינומים, אנו מקבלים מערכת עם מטריצת וונדרמונדה:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

דוגמה

$$(0,1),(1,4),(2,0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(x) = 1 + 6 \cdot 5x - 3 \cdot 5x^2$$

משפט

קיים פולינום יחיד ממעלה לכל היותר n העובר דרך $n+1$ נקודות $(x_0, y_0)\ldots(x_n, y_n)$

הוכחה

יהי $p(x)$ פולינום ממעלה לכל היותר n, העובר דרך $n+1$ הנקודות:

$$0 \le i \le n \qquad p(x_i) = y_i$$

נניח בשלילה כי קיים $q\left(x\right)$ ממעלה לכל היותר n וגם הוא עובר דרך $n+1$ נקודות:

$$q\left(x\right)\neq p\left(x\right) \qquad q\left(x_i\right)=y_i \qquad 0\leq i\leq n$$

נגדיר $r\left(x\right)=p\left(x\right)-q\left(x\right)$. $\deg r\leq\max\left\{\deg\left(p\right),\deg\left(q\right)\right\}\leq n$.
לכל $0\leq i\leq n$, $p\left(x_i\right)=q\left(x_i\right)$, ולכן $r\left(x_i\right)=p\left(x_i\right)-q\left(x_i\right)=0$. כלומר

$$\forall_{0\leq i\leq n} r\left(x_i\right)=0$$

כלומר יש לr $n+1$ שורשים - אבל לפי המשפט היסודי של האלגברה לפולינום מדרגה n יש n שורשים(יכולים להיות שורשים כפולים). הפולינום היחיד ממעלה לכל היותר n שלו יותר מn שורשים הוא פולינום האפס, כלומר:

$$q\left(x\right)=p\left(x\right)+r\left(x\right)=p\left(x\right)+0=p\left(x\right)$$

בסתירה לכך ש$q\left(x\right)\neq p\left(x\right)$.