פתרון תרגיל בית 1 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1 (חימום)**.** תהי G חבורה עם איבר יחידה e. יהי $a \in G$ איבר. הוכיחו:

א. אם $aa = a$, אז $a = e$.

ב. אם יש $b \in G$ כך ש-$ab = e$, אז $b = a^{-1}$ ו-$ba = e$.

פתרון.

א. מפני ש-$a \in G$ איבר בחבורה, אזי קיים לו הופכי a^{-1}. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-a^{-1} מימין (אותה תוצאה תתקבל בכפל משמאל) ונקבל

$$aaa^{-1} = aa^{-1}$$
$$a = e$$

ב. בחבורה כל איבר הוא הפיך. אם $ab = e$, אזי b הופכי ימני של a. אם c הוא הופכי שמאלי כלשהו של a, אזי

$$b = e \cdot b = (ca)b = c(ab) = c \cdot e = c$$

כלומר $c = b$. לכן $b = a^{-1}$ הוא ההופכי של a ו-$ba = e$ לפי הגדרת הופכי.

שאלה 2. תהי G חבורה עם איבר יחידה e, ויהי $a \in G$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1 := a$, ולכל $n > 1$ טבעי נגדיר $a^{n+1} := a^n \cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

א. $a^n a^m = a^{n+m}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ב. $(a^n)^m = a^{nm}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ג. נרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0 := e$ ו-$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי לכל $a_1, \ldots, a_k \in G$ מתקיים $(a_1 \cdots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \cdots a_1^{-1}$. הסיקו כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\left(a^n\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$.

פתרון. בכל הסעיפים פתרון פורמלי מלא יעזר באינדוקציה. אפשר להעזר באינדוקציה כפולה, ואפשר לפעמים להסתפק באינדוקציה על m.

א. לפי ההגדרה $a^n a^m = (\underbrace{a \cdots a}_{n})(\underbrace{a \cdots a}_{m})$ ולפי קיבוציות הפעולה זה שווה ל-$a^{n+m} = \underbrace{a \cdots a}_{m+n}$.

ב. באופן דומה $a^{mn} = \underbrace{a \cdots a}_{mn} = (\underbrace{a \cdots a}_{n}) \cdots (\underbrace{a \cdots a}_{n}) = \underbrace{a^n a^n \cdots a^n}_{m} = (a^n)^m$.

ג. כפל משמאל וכפל מימין של $a_1 \dots a_k$ ב-$a_k^{-1} \dots a_1^{-1}$ הוא איבר היחידה:

$$a_k^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1} a_1 a_2 \dots a_k = a_k^{-1} \dots a_2^{-1} a_2 \dots a_k = \dots = a_k^{-1} a_k = e$$
$$a_1 \dots a_{k-1} a_k a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_1^{-1} = a_1 \dots a_{k-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_1^{-1} = \dots = a_1^{-1} a_1 = e$$

אם נבחר $k = n$ ו-$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a$, אז נקבל $(a^n)^{-1} = a^{-n}$.

שאלה 3. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2 b^2$.

פתרון. נניח שלכל זוג איברים $a, b \in G$ מתקיים $(ab)^2 = abab = aabb = a^2 b^2$. נכפיל משמאל ב-$a^{-1}$ ומימין ב-b^{-1} ונקבל

$$a^{-1} ababb^{-1} = ba = ab = a^{-1} aabbb^{-1}$$

ואחרי צמצומים נקבל $ba = ab$.

בכיוון השני, אם $ab = ba$ לכל $a, b \in G$, אז קל לראות כי

$$(ab)^2 = ab \cdot ab = a \cdot ba \cdot b = a \cdot ab \cdot b = a^2 b^2$$

שאלה 4. בכל סעיף מופיעה קבוצה ופעולה כלשהי על הקבוצה.

עבור כמה שיותר סעיפים בדקו מי מבין האקסיומות של חבורה מתקיימות. כלומר יש לבדוק את סגירות הפעולה, קיבוציות הפעולה, קיום איבר יחידה, והאם כל איבר הוא הפיך. בנוסף בדקו האם הפעולה חילופית.

א. $(\{8, 9, 2, 1, 4\}, \max)$, קבוצה בת חמישה מספרים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ב. $(\{2^i \mid i \geq 0\}, \cdot)$, קבוצת החזקות (השלמות) האי שליליות של 2 עם פעולת הכפל הרגילה.

ג. $(2\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים הזוגיים עם הפעולה $a * b = a + b - 2$.

ד. $(P(\mathbb{Z}), \triangle)$, כאשר $P(\mathbb{Z})$ היא קבוצת החזקה של השלמים. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(\mathbb{Z})$ לפי $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ה. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ו. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ז. $(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \cdot)$, כאשר הקבוצה היא המספרים הרציונליים יחד עם איבר חדש המסומן ∞. הפעולה מוגדרת לפי $\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$ לכל $x \neq 0$, $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 1$ ואחרת זהו כפל רגיל של מספרים רציונליים.

ח. $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a * b = a + b + ab$.

פתרון.

א. רק האקסיומה שכל איבר הפיך לא מתקיימת. הסגירות של הפעולה נובעת מכך שהמקסימום בין שני מספרים מהקבוצה הנתונה הוא אחד מהאיברים בקבוצה. הפעולה קיבוצית כי

$$\max(\max(a, b), c) = \max\{a, b, c\} = \max(a, \max(b, c))$$

איבר היחידה הוא 1, כי הוא מינימלי מבין איברי הקבוצה, ולכן $\max(1, a) = \max(a, 1) = a$ לכל $a \in \{8, 9, 2, 1, 4\}$. הפעולה חילופית. האיברים ששונים מ-1 אינם הפיכים.

ב. רק האקסיומה שכל איבר הפיך לא מתקיימת. מכפלה של חזקות שלמות של 2 היא חזקה שלמה של 2 (כלומר $2^i \cdot 2^j = 2^{i+j}$ ומתקיים $i + j \geq 0$), ולכן הפעולה סגורה. איבר היחידה הוא $2^0 = 1$. הפעולה חילופית וקיבוצית עקב חילופיות וקיבוציות הכפל בטבעיים. פרט ל-1 אף איבר אינו הפיך, ולא זו אינה חבורה.

ג. רק האקסיומה שכל איבר הפיך לא מתקיימת. ישנה סגירות כי $a, b \geq 2$ ולכן $a + b - 2 \in \mathbb{N}$ הוא עדין טבעי וזוגי. הפעולה קיבוצית כי מתקיים $(a * b) * c = a + b + c - 4 = a * (b * c)$ לכל a, b, c בקבוצה. הפעולה חילופית עקב חילופיות החיבור הרגיל בטבעיים, שכן

$$a * b = a + b - 2 = b + a - 2 = b * a$$

לכל $a, b \in 2\mathbb{N}$. איבר היחידה הוא 2 כי לכל a מתקיים $2*a = a*2 = a+2-2 = a$.

ד. מבנה זה הוא חבורה. סגירות נובעת מכך שאם $A, B \in P(\mathbb{Z})$, אז גם $A \triangle B$ היא תת־קבוצה של $\mathbb{Z}$. קיבוציות הפעולה ידועה ממתמטיקה בדידה. איבר היחידה הוא הקבוצה הריקה. קל לבדוק שכל איבר הוא ההופכי של עצמו. הפעולה (כפי ששמה רומז) היא חילופית.

ה. הפעולה לא סגורה, למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$$

ולכן לא מדובר בחבורה, ושאר האקסיומות לא מתקיימות. הפעולה חילופית, לו הייתה סגירות.

ו. מבנה זה הוא חבורה. הסגירות לא מיידית, שכן לא מספיק להראות שמכפלת שני איברים הוא מטריצה, אלא מטריצה ששייכת ל-A:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix}$$

ולשים לב כי $(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$ שהיא הדטרמיננטה של המכפלה היא מכפלה של דטרמיננטות חיוביות, ולכן חיובית בעצמה. הפעולה קיבוצית כי כפל מטריצות הוא קיבוצי. איבר היחידה הוא מטריצת היחידה I_2. כל מטריצה במבנה זה היא הפיכה מפני שמתקיים $a^2 + b^2 > 0$ שהיא הדטרמיננטה, כשהאיבר ההופכי הוא

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ודאו למה מטריצה זו שייכת למבנה. בדיקה ישירה תראה שהפעולה חילופית.

ז. רק האקסיומה של קיבוציות הפעולה לא מתקיימת. הפעולה סגורה לפי הגדרה: כל מכפלה שייכת לקבוצה $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. איבר היחידה הוא 1, שכן לכל $a \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (כולל ∞) מתקיים $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. ההופכי של $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$ הוא כמובן $\frac{n}{m}$. לפי הגדרת הפעולה 0 ו-∞ הם ההופכי אחד של השני. כפל מספרים רציונליים הוא חילופי, והכפל עם ∞ חילופי לפי הגדרה. לכן הפעולה חילופית.
הקיבוציות עשויה לא להשמר כאשר 0 ו-∞ מופיעים במכפלה $a \cdot b \cdot c$. למשל:

$$(0 \cdot 0) \cdot \infty = 0 \cdot \infty = 1 \neq 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot (0 \cdot \infty)$$

ח. מבנה זה הוא חבורה חילופית. הפעולה קיבוצית כי

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a+b+ab)*c = a+b+ab+c+ac+bc+abc \\ &= a+b+c+bc+ab+ac+abc = a*(b+c+bc) = a*(b*c)\end{aligned}$$

כאשר אנחנו נעזרים בחילופיות של החיבור בשיוויון בין השורות. בעזרת החילופיות גם של כפל רגיל נראה שהפעולה חילופית:

$$a*b = a+b+ab = b+a+ba = b*a$$

לכל $a \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ מתקיים $a*0 = a+0+a\cdot 0 = a$ ולכן איבר היחידה הוא $e = 0$. נמצא שכל איבר הפיך כי $a*b = a+b+ab = 0$ אם ורק אם $b(1+a) = -a$, כלומר $b = \frac{-a}{1+a}$ והקבוצה לא כוללת את -1, ולכן אין חלוקה באפס ובנוסף ברור כי $b \neq -1$ (אחרת $\frac{-a}{1+a} = -1$ ונסיק $1 = 0$).

שאלה 5. תהינה $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G \times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

לכל $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$.

א. הוכיחו כי $G\times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו-H.

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G \times H$ אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.

פתרון.

א. ההוכחה לכל אחד מהתנאים בהגדרת חבורה (קיבוציות הפעולה, קיום איבר יחידה וקיום הפיך לכל איבר) נובעת מהתנאי המקביל שמתקיים עבור G ו-H שהן חבורות. יהיו $(g_1,h_1),(g_2,h_2),(g_3,h_3) \in G\times H$. אזי

$$\begin{aligned}((g_1,h_1)(g_2,h_2))(g_3,h_3) &= (g_1g_2,h_1h_2)(g_3,h_3) = (g_1g_2g_3,h_1h_2h_3) \\ &= (g_1,h_1)(g_2g_3,h_2h_3) = (g_1,h_1)((g_2,h_2)(g_3,h_3))\end{aligned}$$

כי הפעולות ב-G וב-H הן קיבוציות. איבר היחידה הוא $e_{G\times H} = (e_G,e_H)$, ואכן

$$(g,h)(e_G,e_H) = (ge_G,he_G) = (g,h) = (e_Gg,e_Hh) = (e_G,e_H)(g,h)$$

לכל איבר $(g,h) \in G\times H$. ההופכי שלו הוא $\left(g^{-1},h^{-1}\right)$ מפני ש-

$$(g,h)\left(g^{-1},h^{-1}\right) = \left(gg^{-1},hh^{-1}\right) = (e_G,e_H) = \left(g^{-1}g,h^{-1}h\right) = \left(g^{-1},h^{-1}\right)(g,h)$$

ב. הוכחה. אם $G\times H$ אבלית, אזי לכל $(g_1,h_1),(g_2,h_2) \in G\times H$ מתקיים

$$(g_1g_2,h_1h_2) = (g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_2,h_2)(g_1,h_1) = (g_2g_1,h_2h_1)$$

ובפרט לכל $g_1,g_2 \in G$ ולכל $h_1,h_2 \in H$ מתקיים $g_1g_2 = g_2g_1$ ו-$h_1h_2 = h_2h_1$, שזו בדיוק ההגדרה לכך ש-G,H אבליות.
אם G,H אבליות, אז נחזור על הטיעון בכיוון השני.

שאלה 6 (העשרה). נתבונן במערכת האלגברית $(S,\cdot)$ שבה S היא קבוצה לא ריקה והפעולה $\cdot$ (המסומנת כמו כפל) היא סגורה וקיבוצית.

איבר $e \in S$ נקרא איבר יחידה מימין אם לכל $c \in S$ מתקיים $ce = c$. באופן דומה מגדירים איבר יחידה משמאל. כמובן שאיבר יחידה בחבורה הוא איבר יחידה משמאל ומימין לפי הגדרות אלו.

הוכיחו שאם ב-$(S,\cdot)$ לכל משוואה מן הצורה $ax = b$ או $xa = b$ יש פתרון במשתנה x, אז S היא חבורה.

פתרון. יהי $a \in S$. לפי ההנחה יש איבר $e_a \in S$ (התלוי ב-a) כך ש-$ae_a = a$. לכל $c \in S$ קיים x כך ש-$c = xa$. אז נסיק כי e_a הוא איבר יחידה מימין, מפני שאז מתקיים $ce_a = xae_a = xa = c$, ולכן e_a הוא איבר יחידה מימין. באופן דומה יש איבר $f_a \in S$ כך ש-$f_a a = a$ והוא איבר יחידה משמאל. אבל אז

$$e_a = f_a e_a = f_a$$

כאשר באגף שמאל השתמשנו בכך ש-f_a יחידה משמאל ובאגף הימני ש-e_a הוא יחידה מימין. לכן e_a הוא איבר יחידה, ולכן ל-$(S, \cdot)$ קיים איבר יחידה. מפני שאיבר היחידה הוא יחיד, נוכל לסמן אותו e ללא תלות ב-a.

נותר להוכיח שכל איבר הוא הפיך. יהי $d \in S$, אז נבחר בפתרון המשוואות ש-$b = e$ ונקבל כי יש פתרון למשוואות $dx = e$ וגם $xd = e$. כלומר d הפיך מימין, נניח עם הופכי מימין d_r ומשמאל, נניח עם הופכי משמאל d_l. לפי התרגול, זה אומר ש-d הפיך, או במפורש

$$d_r = ed_r = d_l d d_r = d_l e = d_l$$

וקיבלנו כי $d_r = d_l$ הוא הופכי של d. לכן $(S, \cdot)$ חבורה.

בהצלחה!