פתרון תרגיל בית 6 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כד' כסלו ה'תשע"ו, 06.12.2015.

שאלה 1. תהי D_4 החבורה הדיהדרלית מסדר 8. תארו את כל תת החבורות הלא טריוויאליות של D_4. הוכיחו כי כולן אבליות. האם כולן ציקליות?

פתרון.

נציג את החבורה D_4 כחבורה הנוצרת על ידי האיברים $\langle\sigma,\tau\rangle$ כאשר מתקיימים היחסים $\sigma^4=\tau^2=e, \sigma\tau=\tau\sigma^3$.

האיברים ב D_4 (בסה"כ 8 איברים) הם: $\{e,\tau,\tau\sigma,\tau\sigma^2,\tau\sigma^3,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$.

לפי משפט לגרנז' עבור $H\le D_4$ מתקיים $|H|\,|\,|D_4|$, כלומר $|H|\in\{1,2,4,8\}$. תת החבורות הטריוויאליות מתקבלות במקרים $|H|\in\{1,8\}$.

אחרת, סדר תת החבורה הוא 2 או 4. נוח להתחיל עם תת החבורות הציקליות. כלומר לבדוק עבור כל אחד מאיברי D_4, מהי תת החבורה הציקלית הנוצרת על ידו. נקבל:

<u>תת החבורות הציקליות מסדר 2</u>

$$\langle\tau\rangle=\{e,\tau\},\langle\tau\sigma\rangle=\{e,\tau\sigma\},\langle\tau\sigma^2\rangle=\{e,\tau\sigma^2\},\langle\tau\sigma^3\rangle=\{e,\tau\sigma^3\},\langle\sigma^2\rangle=\{e,\sigma^2\}$$

<u>תת החבורות הציקליות מסדר 4</u>

$$\langle\sigma\rangle=\langle\sigma^3\rangle=\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$$

כעת נבנה תת חבורות בעזרת שני יוצרים מסדר 2, לקבלת תת חבורות לא ציקליות מסדר 4. נקבל:

$$\langle\tau,\sigma^2\rangle=\{e,\tau,\sigma^2,\tau\sigma^2\},\langle\tau\sigma,\sigma^2\rangle=\{e,\tau\sigma,\sigma^2,\tau\sigma^3\}.$$

עבור כל יתר הצירופים של שני יוצרים מסדר 2 נקבל את אחת משתי תת חבורות אלו או את כל החבורה D_4.

כמובן שלא כל תת החבורות ציקליות כפי שניתן לראות מתאור תת החבורות. יחד עם זאת כולן אבליות.

הסבר: כל תת החבורות הציקליות הן בהכרח אבליות. ולגבי תת החבורות שאינן ציקליות - כל איבריהן מסדר 2 והוכחנו שחבורה שכל איבריה מסדר 2 היא בהכרח אבלית.

שאלה 2. תהי A_n חבורות החילופין (חבורת התמורות הזוגיות ב S_n). ראינו שזו תת חבורה של S_n, וסדר החבורה : $\frac{n!}{2}$. מה הם סדרי האיברים ב A_4?

פתרון.

האיברים ב A_4 הם התמורות הזוגיות ב S_4 , כלומר איבר

סדר 1- איבר היחידה בלבד (id).

סדר 2- מכפלה של תמורות אי זוגיות מהצורה: $(ij)(kl)$

סדר 3- מחזור מאורך 3 מהצורה: (ijk).

ואין אפשרויות נוספות.

שאלה 3. תהי S_n חבורת התמורות.

א. מצא את תת החבורה הציקלית ב S_7 הנוצרת ע"י התמורה: $(57)(123)$.

ב. מצאו <u>יוצר</u> לחיתוך של תת החבורה שמצאתם בסעיף א' עם חבורת החילופין A_7.

פתרון.

א. $\langle(123)(57)\rangle = \{(123)(57), (132), (57), (123), (132)(57), id\}$

ב. נמצא את האיברים המשותפים לתת החבורה $\langle(123)(57)\rangle$ו A_7:

$A_7 \cap \langle(123)(57)\rangle = \{(132), (123), id\}$.
קל לראות שיוצר לתת חבורה זו הינו (123)או (132).

שאלה 4. נגדיר את המֶרְכָּז של חבורה G להיות

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}$$

דהיינו זהו האוסף של כל האיברים ב-G שמתחלפים עם כל איברי G.

א. הוכיחו כי לכל חבורה G מתקיים $Z(G) \leq G$ (כלומר שהמרכז של חבורה הינו תת חבורה).

ב. מצאו את $Z(S_3)$ ואת $Z(D_3 \times \mathbb{Z}_4)$.

ג. הוכיחו $Z(D_{2n+1}) = \{e\}$ וכי $Z(D_{2n}) = \langle\sigma^n\rangle$ עבור $n > 1$. רמז: איך נראה איבר כללי בחבורה הדיהדרלית?

פתרון.

א. על פי הקריטריון להוכחת תת חבורה:

(א) $e \in Z(G)$ כי איבר היחידה מתחלף על פי ההגדרה עם כל איברי החבורה ולכן תמיד במרכז.

(ב) נוכיח סגירות לכפל: יהיו $x, y \in Z(G)$, נוכיח שגם $xy \in Z(G)$ כלומר נוכיח שלכל $g \in G$ מתקיים $g(xy) = (xy)g$. הוכחה: $gxy = xgy = xyg$. (שני השוויונות נובעים מהנתון ש x ו y במרכז).

(ג) נוכיח סגירות להופכי: יהא $x \in Z(G)$. נוכיח שגם $x^{-1} \in Z(G)$. הוכחה: כיוון ש x במרכז, מתקיים לכל $g \in G$ ש $xg = gx$. נכפול משמאל ומימין ב x^{-1} את שני אגפי השוויון: $x^{-1}xgx^{-1} = x^{-1}gxx^{-1}$ נצמצם ונקבל: $gx^{-1} = x^{-1}g$.

ב. $Z(S_3) = id$ ולמעשה לכל S_n כאשר $n \geq 3$ המרכז טריוויאלי (כלומר כולל רק את איבר היחידה). לגבי $Z(D_3 \times \mathbb{Z}_4)$, נבחן את חבורת המכפלה $D_3 \times \mathbb{Z}_4$. החבורה $\mathbb{Z}_4$ אבלית ולכן כל איבריה במרכז. לעומת זאת $Z(D_3) = e$. קל לוודא שאיבר של חבורת המכפלה נמצא במרכז אם כל אחד מהאיברים במכפלה נמצא במרכז של החבורה אליה הוא משתייך. לכן נקבל: $Z(D_3 \times \mathbb{Z}_4) = \{(e,0), (e,1), (e,2), (e,3)\}$.

ג. נוכיח את שני המקרים יחד. נסמן את החבורה הדיהדרלית הדיהדרלית ע"י D_{2n}, ונראה שעבור n זוגי $Z(D_{2n}) = \langle\sigma^n\rangle$, ועבור n אי זוגי $Z(D_{2n+1}) = \{e\}$. איבר כללי בחבורה הדיהדרלית הינו מהצורה: $\{\tau^i\sigma^j : i \in \{0,1\}, j \in \{0,1,...,n-1\}\}$. מתקיימים היחסים: $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$. אם נכפול ב σ משמאל את שני האגפים, נקבל: $\sigma^2\tau = \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\sigma^{-2}$. באופן כללי נכתוב:

$$\sigma^r\tau = \tau\sigma^{-r} \tag{1}$$

כעת, מכיוון ש σ ו τ יוצרים יחד את D_{2n}, איבר כלשהו בחבורה זו מוכל במרכז אא"ם האיבר מתחלף אם כל אחד מהיוצרים. כלומר: $x = \tau^i\sigma^j \in Z(D_{2n})$ אא"ם $x\tau = \tau x$ וגם $x\sigma = \sigma x$.

מהתנאי $x\sigma = \sigma x$ נקבל $\tau\sigma^{j+1} = \sigma\tau^i\sigma^j$. ותנאי זה שקול ל:

$$\tau^i\sigma = \sigma\tau^i \tag{2}$$

ניתן לראות שתנאי זה מתקיים עבור $i = 0$, אך האם תנאי זה מתקיים עבור $i = 1$? התשובה היא לא מכיוון שאם $i = 1$ אזי נקבל מנוסחה (2) ש: $\tau\sigma = \sigma\tau$, ועל פי נוסחה (1) מתקיים: $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$. אבל אז נקבל: $\sigma^2 = 1$, בסתירה לסדר של σ.

לכן בהכרח $i = 0$ ו $x - \sigma^j$. נעבור לתנאי השני לפיו $x\tau = \tau x$. נציב את x ונקבל: $\sigma^j\tau = \tau\sigma^j$. וכן מתקיים:

$$\sigma^{2j} = 1 \tag{3}$$

לכן, מכיוון ש $o(\sigma) = n$, נקבל מנוסחה (3)ש: $n|2j$. לכן מתקיים אחד מהשניים: $j = 0$ או $2j = n$ מכיוון ש: $0 \le j \le n-1$.

אם $j = 0$ אז: $x = \sigma^j = 1/$ ואם $2j = n$, אז nבהכרח זוגי ו $x = \sigma^j = \sigma^{\frac{n}{2}}$.

לבן לסיכום $Z(D_{2n}) = \langle\sigma^n\rangle$ ו $Z(D_{2n+1}) = \{e\}$.

שאלה 5. הראו שמתקיים: $S_3 = \langle(12),(123)\rangle = \langle(12),(23)\rangle$.

פתרון.

נזכור שעל פי לגרנז', סדר תת חבורה מחלק את סדר החבורה לכן הסדרים האפשריים לתת חבורות לא טריויאליות הנוצרות ע"י איברים מ S_3 הם $2,3$.

כמו כן, הוכחנו שסדר איבר בחבורה מחלק את סדר החבורה.

החבורה $\langle(12),(123)\rangle$בהכרח שווה ל S_3 הסבר: סדר המחזור (123) הוא 3 וסדר המחזור (12) הוא 2. כעת, מכיוון שסדר תת החבורה $\langle(12),(123)\rangle$מתחלק ב 2ו 3, אזי בהכרח הסדר הוא 6, כלומר $S_3 = \langle(12),(123)\rangle$

לגבי $\langle(12),(23)\rangle$, נשים לב ש: $(12)(13) = (132)$כלומר תת חבורה זו מכילה איבר מסדר 3 , לכן על פי נימוק זהה, נסיק שגם תת חבורה זו מתלכדת עם החבורה S_3.

שאלה 6. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 8 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 8 של U_{32}.

פתרון.

תת החבורה $\langle 3\rangle$מסדר 8 וציקלית ואילו $\langle 9,15\rangle$ מסדר 8 ולא ציקלית.

שאלה 7 (אתגר). צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תן דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב-n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.

רמזים וספוילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.

בהצלחה!