תורת המספרים האלגברית (88798)
תרגיל 1

1. יהיו $A \subseteq B \subseteq C$ חוגים. הוכח שאם B שלם מעל A ואם C שלם מעל B, אזי C שלם מעל B.

2. יהיו $A \subseteq B$ תחומי שלמות ויהי C הסגור השלם של A ב־B. הוכח כי C סגור בשלמות.

3. כאן ובשלוש השאלות הבאות, A הינו תחום שלמות סגור בשלמות, $K = \operatorname{Frac} A$ שדה השברים, L/K הרחבה סופית, B הסגור השלם של A ב־L.

   יהי $\alpha \in L$, ויהי $f_\alpha(x) \in K[x]$ הפולינום המינימלי של α. הוכח כי $\alpha \in B$ אם ורק אם $f_\alpha(x) \in A[x]$.

4. תהי M/L הרחבה סופית, ויהי $\alpha \in M$. הוכח כי

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_{M/K}(\alpha) &= \mathrm{N}_{L/K}(\mathrm{N}_{M/L}(\alpha)) \\ \mathrm{Tr}_{M/K}(\alpha) &= \mathrm{Tr}_{L/K}(\mathrm{Tr}_{M/L}(\alpha)). \end{aligned}$$

5. תהי L/K הרחבה פרידה, ויהי $\alpha \in L$. כמו בשיעור, נקבע סגור אלגברי $K \subset \overline{K}$, ויהי Σ האוסף של כל השיכונים $\sigma : L \hookrightarrow \overline{K}$ המקיימים $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\beta \in K$. הוכח כי:

   (א) $\mathrm{N}_{L/K}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \Sigma} \sigma(\alpha)$.

   (ב) $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(\alpha)$.

   (ג) יהי $g_\alpha(x)$ הפולינום האופייני של α, כלומר הפולינום האופייני של ההעתקה ה־K־לינארית $\mu_\alpha : L \to L$ המוגדרת על ידי $\mu_\alpha(\beta) = \alpha\beta$. אזי $g_\alpha(x) = \prod_{\sigma \in \Sigma}(x - \sigma(\alpha))$.

   (ד) יהי $\beta \in B$. אזי β הפיך אם ורק אם $\mathrm{N}_{L/K}(\beta)$ הינו איבר הפיך של A.

6. נניח בנוסף כי A תחום ראשי. יהי $B \subset M \subset L$ ונניח כי M נוצר סופית כ־B־מודול. כיוון ש־ $A \subset M$ יש מבנה טבעי של A־ מודול על M. הוכח כי M הינו A־מודול חפשי מדרגה $[L : K]$.

7. יהי $D \in \mathbb{Z}$, נניח כי $D \notin \{0,1\}$, וכי D חפשי מריבועים, כלומר אינו מתחלק ב־ n^2 לשום $n > 1$. יהי $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. מצא את חוג השלמים $\mathcal{O}_K$ ואת הדיסקרימיננטה d_K.

8. הוכח כי $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ הינו בסיס שלם של $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

9. הוכח שהחוג $\mathbb{Q}[x,y]/(x^3 - y^2)$ הינו תחום שלמות אך אינו סגור בשלמות.

10. הוכח, בשיטות של תורת המספרים היסודית, את המשפט של רבי לוי בן גרשום: אם $x, y > 1$ הינם שלמים שמקיימים $x^3 - y^2 = \pm 1$, אזי $(x,y) = (2,3)$.